5. Übungsblatt zu Programmierung

Prof. Gert Smolka, Thorsten Brunklaus
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws00/

Abgabe: 1. Dezember 2000 in der Vorlesungspause (auf Papier)

Allgemeine Hinweise: Die Übungsblätter sollen in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die Lösungen geben Sie bitte Freitag in der Vorlesungspause auf Papier ab. Jede Gruppe soll nur eine Lösung einreichen, versehen mit den Namen und den Matrikelnummern der Gruppenmitglieder, sowie der Übungsgruppennummer.

Aufgabe 5.1: Induktion (4) Gegeben sei die rekursiv definierte Funktion

$$f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(n-1) + 2n + 1$$

Beweisen Sie durch Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad f(n) = (n+1)^2$$

Aufgabe 5.2: Induktion (4) Gegeben sei die rekursiv definierte Funktion

$$f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } f(n-1) + n^2$$

Beweisen Sie durch Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad f(n) = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$$

Aufgabe 5.3: Induktion (4) Gegeben sei die rekursiv definierte Funktion

$$f \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$f(q, n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(q, n-1) + q^n$$

Beweisen Sie durch Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1: \quad f(q, n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Aufgabe 5.4: Graphen (2+2+2+2) Seien die folgenden Graphen gegeben:

(a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$E = \{(1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (6, 2), (6, 3)\}$

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$E = \{(2, 7), (3, 1), (3, 6), (4, 2), (4, 3), (7, 5)\}$

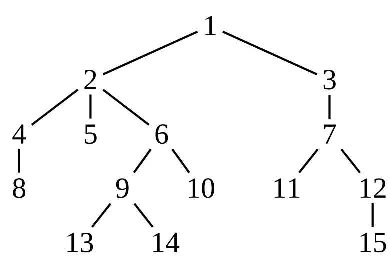
(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$E = \{(2, 1), (2, 6), (3, 8), (4, 4), (5, 2), (5, 7), (6, 1), (7, 6)\}$

(d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$

Zeichnen Sie diese Graphen und beantworten Sie für jeden Graphen die folgenden Fragen:

- Welche Größe und welche Tiefe hat der Graph?
- Welche Quellen und welche Senken hat der Graph?
- Ist der Graph zyklisch? Wenn ja, geben Sie eine Zyklus an.
- Ist der Graph zusammenhängend? Stark zusammenhängend?
- Ist der Graph ein Wald? Ein Baum?

Aufgabe 5.5: Bäume (9) Gegeben sei die grafische Darstellung eines Baums:



(a) Geben Sie den Baum als Graph (V, E) an.

(b) Geben Sie den Baum als geordneten Baum in Tabellenform an.

(c) Geben Sie den Baum als Term an.

(d) Geben Sie die Größe und Tiefe des Baums an.

(e) Geben Sie die Wurzel, die Blätter, und die inneren Knoten des Baums an.

(f) Geben Sie für jedes Blatt v einen Pfad an, der von der Wurzel zu v führt.

(g) Zeichnen Sie alle Teilbäume des Baums, die den Knoten 7 als Wurzel haben.

(h) Zeichnen Sie den vom Knoten 2 aus erreichbaren Teilbaum des Baums.

(i) Zeichnen Sie alle Unterbäume des vom Knoten 2 aus erreichbaren Teilbaums des Baums.

Aufgabe 5.6: Geordnete Bäume (2+2+1+2+2) Gegeben sei der geordnete Baum

[]	4
[1]	3
[2]	0
[2,1]	4
[2,2]	2
[2,2,1]	1
[2,2,2]	6
[2,3]	7
[3]	2
[3,1]	4
[3,1,1]	0
[3,2]	5

(a) Zeichnen Sie den Baum.

(b) Geben Sie die Größe und Tiefe des Baums an.

(c) Wieviele Unterbäume hat der Baum?

(d) Geben Sie den von [3] aus erreichbaren Teilbaum in Tabellenform an.

(e) den von [2,1] aus erreichbaren Teilbaum in Tabellenform an.

Aufgabe 5.7: Größenverhältnis in Binärbäumen (4) Beweisen Sie durch Induktion über $t(B)$, dass für jeden nichtleeren Binärbaum B gilt: $b(B) \leq 2^{t(B)}$.

Aufgabe 5.8: Größenverhältnisse in ternären Bäumen (4+4) Ein *ternärer* Baum ist ein Baum, bei dem jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau 3 Unterbäume hat. Beweisen Sie durch Induktion über $t(B)$, dass für jeden nichtleeren, balancierten ternären Baum B gilt:

(a) $b(B) = 3^{t(B)}$

(b) $g(B) = \frac{1}{2}(3^{t(B)+1} - 1)$

Aufgabe 5.9: Balancierte Binärbäume (Challenge, ohne Punkte) Beweisen Sie durch Induktion über $t(B)$, dass für jeden nichtleeren Binärbaum B gilt:

$$b(B) = 2^{t(B)} \;\Rightarrow\; B \text{ balanciert}$$

Verwenden Sie dabei die Ungleichung aus Aufgabe 5.7.