2. Übungsblatt zu Programmierung WS 2002 / 03

Prof. Dr. Gert Smolka und Dipl.-Inform. Thorsten Brunklaus
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws02/

Abgabe: Montag, 4. November 2002

Alle Aufgaben sind auf Papier im Briefkasten Nr. 15 im Durchgang zwischen den Gebäuden 36 und 45 abzugeben. Ihre Abgaben können nur berücksichtigt werden, wenn Sie jeweils Ihren Namen und **die Nummer Ihrer Übungsgruppe angeben**.

Aufgabe 2.1: Mathematische Objekte $(12 = 4 * 3)$ Seien die folgenden Objekte gegeben:

$$\begin{aligned} x &= \langle 1,\ \{2, 3, \langle 2, 3\rangle\},\ \langle 2, \langle 3, 7\rangle\rangle\rangle \\ y &= \{2,\ \{\langle\rangle, \{\}\},\ (\lambda x \in \mathbb{B}.\ x + 3)\} \\ z &= \{\mathbb{N}, \mathbb{B}\} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie Baumdarstellungen für x, y und z an.

(b) Welche der drei Objekte sind endlich? Welche sind finitär?

(c) Geben Sie alle Unterobjekte von y an.

(d) Geben Sie alle echten Teilobjekte von y an, die keine Unterobjekte sind.

Aufgabe 2.2: Produkte, Summen und Pfeile $(12 = 6 * 2)$ Geben Sie alle Elemente der folgenden Mengen an:

(a) $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$

(b) $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B}$

(c) $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} \uplus \mathbb{B}$

(d) $\mathbb{B} \uplus (\mathbb{B} \times \mathbb{B})$

(e) $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$

(f) $\mathbb{B} \rightharpoonup \mathbb{B}$

Aufgabe 2.3: Endliche Funktionen $(18 = 3 * 2 + 4 + 4 * 2)$ Seien die Funktionen $f, g \in \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ wie folgt gegeben:

(x, y)	$f(x, y)$	$g(x, y)$
$(0, 0)$	0	0
$(0, 1)$	0	1
$(1, 0)$	0	1
$(1, 1)$	1	1

(a) Beschreiben Sie f und g mit Lamda-Notation und Konditionalen (möglichst einfach):

$$f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 .\ \dots$$
$$g = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 .\ \dots$$

(b) Geben Sie die Elemente der Menge f an.

(c) Geben Sie die Elemente der Menge $f + g$ an (Adjunktion).

(d) Welche der folgenden Aussagen sind gültig:

(i) $f \in \mathbb{B}^2 \overset{fin}{\rightharpoonup} \mathbb{B}$
(ii) $f + g \in \mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$
(iii) $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B} = \mathbb{B}^2 \overset{fin}{\rightharpoonup} \mathbb{B}$
(iv) $\mathbb{B}^2 \overset{fin}{\rightharpoonup} \mathbb{B} = \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

(e) Geben Sie eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$ an, die für $\mathbb{B}$ nicht surjektiv ist.

(f) Geben Sie eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$ an, die für $\mathbb{B}$ surjektiv ist.

(g) Gibt es eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$?

(h) Geben Sie die Kardinalitäten der Mengen $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ und $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$ an.

Aufgabe 2.4: Kaskadierte Funktionen $(10 = 5 + 5)$ Sei die Funktion

$$f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 .\ \text{if } x = y \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

gegeben. Dann gibt es genau eine Funktion $f' \in \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})$ mit

$$\forall x \in \mathbb{B} \quad \forall y \in \mathbb{B} : \qquad f(x, y) = (f'x)y$$

(a) Geben Sie die Elemente von f' an.

(b) Beschreiben Sie f' mit einem Lambda-Ausdruck.

Aufgabe 2.5: Kaskadierte Mehrfachanwendung und Multiplikation $(18 = 13 + 5)$

(a) Geben Sie eine Prozedur

```
apply : (int → int) → int → int → int
```

an, die zu f, $n \geq 0$ und x die Zahl liefert, die man durch n-maliges Anwenden von f auf x erhält. Beispielsweise soll dreimaliges Anwenden von f auf x das Ergebnis $f(f(fx))$ liefern. Nullmaliges Anwenden von f auf x soll x liefern.

(b) Schreiben Sie mithilfe von `apply` eine Prozedur

```
mul : int → int → int
```

die zu x und y das Produkt $x \cdot y$ liefert. Die Prozedur `mul` soll weder Rekursion noch Multiplikation verwenden.

Aufgabe 2.6: Kaskadiertes Until und Quadratwurzel $(18 = 13 + 5)$

(a) Schreiben Sie eine Prozedur

```
until : (int → bool) → int
```

die zu einer Prozedur p das kleinste $n \in \mathbb{N}$ berechnet, für das p den Wert `true` liefert. Schreiben Sie `until` mithilfe eines Let-Ausdrucks, der eine rekursive Hilfsprozedur `until'` : `int` → `int` deklariert.

(b) Geben Sie mithilfe von `until` eine Abstraktion an, die eine Prozedur `int` → `int` liefert, die zu $x \in \mathbb{N}$ das größte $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \leq x$ berechnet.

Aufgabe 2.7: Typen $(12 = 4 * 3)$ Geben Sie Ausdrücke an, die die folgenden Typen haben:

```
(int → bool) → (bool → real) → int → real

(int * int → bool) → int → bool

(int → bool → real) → int → bool → real

(int → real) → (bool → int) → int * bool → real * int
```

Ihre Ausdrücke dürfen nur Abstraktionen, Prozeduranwendungen, Tupel, Bezeichner und Typen enthalten. Sie dürfen also keine Konstanten, Operatoren oder Hilfsprozeduren verwenden.