6. Übungsblatt zu Programmierung WS 2002 / 03

Prof. Dr. Gert Smolka und Dipl.-Inform. Thorsten Brunklaus
`www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws02/`

Abgabe: Montag, 2. Dezember 2002

Die Aufgaben sind auf Papier im Briefkasten Nr. 15 im Durchgang zwischen den Gebäuden 36 und 45 abzugeben. Ihre Abgaben können nur berücksichtigt werden, wenn Sie jeweils Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe angeben.

Aufgabe 6.1: Natürliche Induktion $(9 = 2 + 5 + 2)$ Gegeben sei die rekursiv definierte Funktion

$$f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$
$$f(n) = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } f(n-1) + 2n + 1$$

(a) Geben Sie die Terminierungsbedingungen der Definition an.

(b) Beweisen Sie durch natürliche Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ f(n) = (n+1)^2$.

(c) Geben Sie die Grundmenge und die Aussagemenge des Induktionsbeweises an.

Aufgabe 6.2: Natürliche Induktion $(10 = 3 + 2 + 5)$ Für $n \in \mathbb{N}^+$ kann man die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \ = \ 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$$

bestimmen.

(a) Geben Sie eine rekursive Definition für eine Funktion $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an, die für $n > 0$ den Wert der Summe liefert.

(b) Geben Sie die Terminierungsbedingungen der Definition an.

(c) Beweisen Sie für durch natürliche Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}^+\colon\ f(n) = n^2$.

Aufgabe 6.3: Natürliche Induktion $(10 = 3 + 2 + 5)$ Für $n \in \mathbb{N}$ kann man die Summe

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \ = \ 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$$

bestimmen.

(a) Geben Sie eine rekursive Definition für eine Funktion $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an, die für $n \geq 0$ den Wert der Summe liefert.

(b) Geben Sie die Terminierungsbedingungen der Definition an.

(c) Beweisen Sie für durch Induktion über n: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ f(n) = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$.

Aufgabe 6.4: Natürliche Induktion $(12 = 3 + 2 + 5 + 2)$ Für $q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ kann man die Summe

$$\sum_{i=0}^{n} q^i \;=\; q^0 + q^1 + \cdots + q^n$$

bestimmen.

(a) Geben Sie eine rekursive Definition für eine Funktion $f \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an, die für q und n den Wert der Summe liefert.

(b) Geben Sie die Terminierungsbedingungen der Definition an.

(c) Beweisen Sie für durch natürliche Induktion:

$$\forall q \in \mathbb{R}\colon\; q \neq 1 \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}\colon\; f(q,n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

(d) Geben Sie die Grundmenge und die Aussagemenge des Induktionsbeweises an.

Aufgabe 6.5: Strukturelle Induktion für Listen $(29 = 5 + 4 * 6)$ Sei X eine Menge. Seien die Konkatenation, Länge und Reversion von Listen über X wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lll}
@ \in \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X) & |_| \in \mathcal{L}(X) \to \mathbb{N} & rev \in \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X) \\
\quad nil@ys = ys & \quad |nil| = 0 & \quad rev(nil) = nil \\
(x::xr)@ys = x::(xr@ys) & |x::xr| = 1 + |xr| & rev(x::xr) = rev(xr)@[x]
\end{array}$$

Im Skript haben wir gezeigt, dass

$(*)\quad (xs@ys)@zs = xs@(ys@zs)$

für alle Listen $xs, ys, zs \in \mathcal{L}(X)$ gilt. Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass die folgenden Gleichungen für alle Listen $xs, ys, zs \in \mathcal{L}(X)$ gelten:

(a) $xs@nil = xs$

(b) $|xs@ys| = |xs| + |ys|$

(c) $|rev(xs)| = |xs|$

(d) $rev(xs@ys) = rev(ys)@rev(xs)$

(e) $rev(rev(xs)) = xs$

Aufgabe 6.6: Strukturelle Induktion für Listen $(12 = 3 + 2 + 5 + 2)$ Sei X eine Menge.

(a) Geben Sie eine rekursive Definition für eine Funktion $f \in \mathcal{L}(X) \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an, für die gilt:

$$\forall xs \in \mathcal{L}(X)\; \forall n \in \mathbb{Z}\colon\; f(xs, n) = |xs| + n$$

(b) Geben Sie die Terminierungsbedingungen für die Definition an.

(c) Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass ihre Funktion die obige Gleichung erfüllt.

(d) Geben Sie die Grundmenge und die Aussagemenge des Induktionsbeweises an.

Aufgabe 6.7: Strukturelle Rekursion für Bäume $(18 = 3 * 6)$ Sei X eine Menge. Sei die Größe, Tiefe und Breite von Bäumen über X wie folgt definiert:

$$s(x, [t_1, \ldots, t_n]) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{i=1}^{n} s(t_i) \qquad \text{Größe}$$

$$d(x, [t_1, \ldots, t_n]) \stackrel{\text{def}}{=} \max(\{0\} \cup \{ d(t_i) + 1 \mid 1 \leq i \leq n \}) \qquad \text{Tiefe}$$

$$b(x, [t_1, \ldots, t_n]) \stackrel{\text{def}}{=} \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } \sum_{i=1}^{n} b(t_i) \qquad \text{Breite}$$

Unter einem *ternären Baum* versteht man einen Baum, bei dem jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau drei Nachfolger hat.

(a) Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden Binärbaum $t \in \mathcal{T}(X)$ gilt: $b(t) \leq 2^{d(t)}$.

(b) Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden balancierten ternären Baum $t \in \mathcal{T}(X)$ gilt: $b(t) = 3^{d(t)}$.

(c) Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden balancierten ternären Baum $t \in \mathcal{T}(X)$ gilt: $s(t) = \frac{1}{2}(3^{d(t)+1} - 1)$.