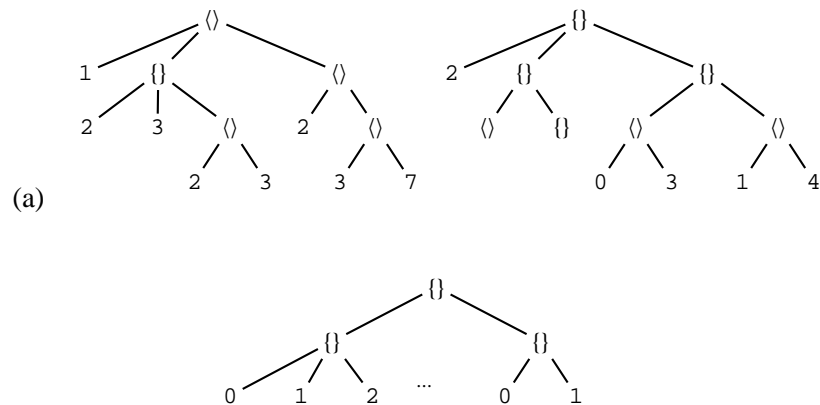




**Programmierung WS 2002 / 03:  
Musterlösung zum 2. Übungsblatt**

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Thorsten Brunklaus

**Aufgabe 2.1: Mathematische Objekte (12 = 4 \* 3)**



(b)  $x, y, z$  sind endlich,  $x, y$  sind finitär.

(c)  $2, \{\langle \rangle, \{\}\}, \{\langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$

(d)  $\langle \rangle, \{\}, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, 0, 3, 1, 4$

**Aufgabe 2.2: Produkte, Summen und Pfeile (12 = 6 \* 2)**

(a)  $\mathbb{B} \times \mathbb{B} = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$

(b)  $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$

(c)  $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} \uplus \mathbb{B} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$

(d)  $\mathbb{B} \uplus (\mathbb{B} \times \mathbb{B}) = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, \langle 0, 0 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 1, 0 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 0, 1 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 1, 1 \rangle \rangle\}$

(e)  $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} = \{\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}, \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}, \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}, \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}\}$

(f)  $\mathbb{B} \rightharpoonup \mathbb{B} = \{\{\}, \{\langle 0, 0 \rangle\}, \{\langle 0, 1 \rangle\}, \{\langle 1, 0 \rangle\}, \{\langle 1, 1 \rangle\}\} \cup \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

**Aufgabe 2.3: Endliche Funktionen (18 = 3 \* 2 + 4 + 4 \* 2)**

(a)

$f = \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2 . \text{if } x = 1 \text{ then } y \text{ else } 0$

$g = \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2 . \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else } 1$

(b)

$$f = \{\langle\langle 0, 0 \rangle, 0\rangle, \langle\langle 1, 0 \rangle, 0\rangle, \langle\langle 0, 1 \rangle, 0\rangle, \langle\langle 1, 1 \rangle, 1\rangle\}$$

(c)

$$\begin{aligned} f + g &= g = \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2. \text{ if } x = 0 \text{ then } y \text{ else } 1 \\ &= \{\langle\langle 0, 0 \rangle, 0\rangle, \langle\langle 1, 0 \rangle, 1\rangle, \langle\langle 0, 1 \rangle, 1\rangle, \langle\langle 1, 1 \rangle, 1\rangle\} \end{aligned}$$

(d) (i) Gültig ( $\mathbb{B}$  endlich)

(ii) Gültig

(iii) Gültig ( $\mathbb{B}$  endlich)

(iv) Falsch ( $\emptyset \in (\mathbb{B}^2 \xrightarrow{f^n} \mathbb{B}) - (\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B})$ )

(e)  $\emptyset$

(f)  $\{\langle\langle 0, 0 \rangle, 0\rangle, \langle\langle 1, 1 \rangle, 1\rangle\}$

(g) Nein, da  $|\mathbb{B}^2| > |\mathbb{B}|$

(h)

$$|\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}| = 2^4 = 16$$

$$|\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}| = 3^4 = 81$$

#### Aufgabe 2.4: Kaskadierte Funktionen (10 = 5 + 5)

(a)  $f' = \{\langle 0, \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\} \rangle, \langle 1, \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} \rangle\}$

(b)  $f' = \lambda x \in \mathbb{B}. \lambda y \in \mathbb{B}. \text{ if } x = y \text{ then } 1 \text{ else } 0$

#### Aufgabe 2.5: Kaskadierte Mehrfachanwendung und Multiplikation (18 = 13 + 5)

(a) 

```
fun apply (f : int -> int) (n : int) (x : int) : int =
  if n <= 0 then x else apply f (n - 1) (f x)
```

(b) 

```
fun mul (x : int) (y : int) : int =
  if x > 0 then apply (fn z => y + z) x 0
  else ~(apply (fn z => y + z) (~x) 0)
```

#### Aufgabe 2.6: Kaskadiertes Until und Quadratwurzel (18 = 13 + 5)

(a) 

```
fun until (p : int -> bool) : int =
  let
    fun until' (n : int) : int = if p n then n else until'(n+1)
  in
    until' 0
  end
```

(b) 

```
fn (x : int) => until (fn (n : int) => n*n > x) - 1
```

**Aufgabe 2.7: Typen** (12 = 4 \* 3)

- (a) `fn (f : int -> bool) => fn (g : bool -> real) =>  
(fn (x : int) => g (f x))`
- (b) `fn (f : int * int -> bool) => fn (x : int) => f (x, x)`
- (c) `fn (f : int -> bool -> real) => f`
- (d) `fn (f : int -> real) => fn (g : bool -> int) => fn (x : int, y : bool) =>  
(f x, g y)`