11. Übungsblatt zu Programmierung 1, WS 2008/09

Prof. Dr. Gert Smolka, Mark Kaminski, M.Sc.
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws08/

Lesen Sie im Buch: Kapitel 9, 10

Aufgabe 9.15 Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur *fib* die Gleichung $2 \cdot f(n+1) = f(n+3) - fn$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 9.20 Zeigen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$pn = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } p(n-1) + 2n + 1$$

die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ (n+1)^2$ berechnet.

Aufgabe 9.21 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$\begin{aligned} p(x,y) = \ & \text{if } x < y \text{ then } p(x,\ y-1) \text{ else} \\ & \text{if } x > y \text{ then } p(x-1,\ y) \text{ else } x \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\,(x,y) \in \mathbb{Z}^2.\ \min\{x,y\}$ berechnet.

Aufgabe 9.24 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$\begin{aligned} p(x,y) = \ & \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else} \\ & \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else} \\ & \text{if } x \le y \text{ then } p(x-1,\ y+1) \text{ else } p(x+1,\ y-1) \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\,(x,y) \in \mathbb{N}^2.\ x + y$ berechnet.

Aufgabe 9.26 Geben Sie eine rekursive Prozedur $p : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}^+$ die Summe $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}^+.\ n^2$ berechnet.

Aufgabe 9.29 Sie sollen zeigen, dass die Prozeduren

$$p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$p\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } p(x-1) + x$$

$$q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$q\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } \frac{x}{2}(x+1)$$

semantisch äquivalent sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Geben Sie natürliche Terminierungsfunktionen für p und q an.
b) Geben Sie die Ergebnisfunktion von q an.
c) Zeigen Sie, dass die Ergebnisfunktion von q die definierende Gleichung von p für alle $x \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

Aufgabe 9.30

a) Geben Sie den Rekursionsbaum für *am* und $(2,2)$ an.
b) Geben Sie eine Prozedur an, die für $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ die Größe des Rekursionsbaums für *am* und (x,y) liefert.

Aufgabe 9.31 Geben Sie in der Relation Ter_2 einen Pfad der Länge 5 an, der vom Knoten $(1,0)$ zum Knoten $(0,0)$ geht.

Aufgabe 10.1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 2n \le 2^n$
b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 3n \le 3^n$
c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon\ n^3 - n = 3k$

Aufgabe 10.2 Dieter Schlau findet Induktionsbeweise toll. Zum Spaß versucht er zu zeigen, dass $2^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Und siehe da, nach einiger Zeit hat er einen Induktionsbeweis für diese Behauptung. Können Sie Dieter sagen, wo der Fehler in seinem Beweis steckt?

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 2^n = 1$.

Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $2^n = 2^0 = 1$.

Sei $n > 0$. Mit Induktion für $n-1$ und $n-2$ folgt $2^{n-1} = 1$ und $2^{n-2} = 1$. Also $2^n = \frac{2^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$.

Aufgabe 10.13 (Hardtsche Identität) Betrachten Sie die Prozedur

$$
\begin{aligned}
&p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\
&p\ 0 \ = \ 0\\
&p\ 1 \ = \ 1\\
&p\ n \ = \ p(n-1) + p(p(n-1) - p(n-2)) \quad \text{für } n > 1
\end{aligned}
$$

Wegen der geschachtelten Rekursion lässt sich die Terminierung der Prozedur nicht ohne Information über die Ergebnisfunktion der Prozedur zeigen. Beweisen Sie durch natürliche Induktion, dass die Prozedur die Identitätsfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$ berechnet.

Aufgabe 10.14 Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$p(x, y) = 0 \quad \text{für } x > y$$
$$p(x, y) = x + p(x + 1, y) \quad \text{für } x \leq y$$

a) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.

b) Zeigen Sie durch Induktion: $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x \leq y: \quad p(x, y) = p(x, y - 1) + y$.

Aufgabe 10.15 Geben Sie für die Prozedur *rev* die Rekursionsfunktion, die Rekursionsrelation sowie eine natürliche Terminierungsfunktion an.

Aufgabe 10.16 Sei X eine Menge. Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass für alle Listen $xs, ys \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

a) $|xs@ys| = |xs| + |ys|$

b) $|rev\, xs| = |xs|$