Prof. Dr. Gert Smolka, Christian Doczkal, M.Sc.

www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws10/

Lesen Sie im Buch: Kapitel 9

Aufgabe 8.16 Geben Sie die folgenden Mengen an:

a) $\mathit{Dom}\ (\lambda x \in \mathbb{N}.\ x^2)$
b) $\mathit{Ran}\ (\lambda x \in \mathbb{N}.\ x^2)$

Aufgabe 9.2 Bleiben die Wohlgeformtheitsbedingungen für die definierenden Gleichungen gültig, wenn man bei der Prozedur

a) *fac* den Ergebnisbereich zu $\mathbb{Z}$ verändert?
b) *fac* den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}_+$ verändert?
c) *fac* den Argumentbereich und den Ergebnisbereich zu $\mathbb{Z}$ verändert?
d) fac' den Argumentbereich zu $\mathbb{N}$ verändert?
e) *euclid* den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}_+$ verändert?
f) *gcd* den Argumentbereich zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}$ verändert?

Aufgabe 9.3 Geben Sie die Anwendungsgleichungen für die folgenden Anwendungen der Beispielprozeduren an:

a) $\mathit{fib}\ 7$
b) $\mathit{euclid}(63, 35)$
c) $\mathit{gcd}(35, 21)$

Aufgabe 9.5 Geben Sie eine Prozedur $\mathit{euclid}' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an, die *euclid* erweitert und deren definierenden Gleichungen ohne Konditionale formuliert sind.

Aufgabe 9.6 Geben Sie die Rekursionsfunktion der Prozedur fac' an.

Aufgabe 9.7 Geben Sie eine terminierende und baumrekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die für jedes Argument das Ergebnis 0 liefert.

Aufgabe 9.8 Geben Sie eine Prozedur mit der folgenden Rekursionsfunktion an: $\lambda x \in \mathbb{Z}.\ \text{if } x < 1 \text{ then } \langle\rangle \text{ else } \langle x-1,\ x-1\rangle$.

Aufgabe 9.11 Zu einer Prozedur $p : X \to Y$ kann man Prozeduren $X \to \mathbb{N}$ angeben, die für terminierende Argumente x von p die Größe und die Tiefe des Rekursionsbaums für x und p liefern. Schreiben Sie solche Prozeduren für *gcd*. Realisieren Sie die Prozeduren in Standard ML.

Aufgabe 9.12 Sei eine Prozedur mit der folgenden Rekursionsfunktion gegeben:

$$\lambda x \in \mathbb{Z}.\ \text{if } x < 0 \text{ then } \langle x-5\rangle \text{ else if } x < 4 \text{ then } \langle\rangle \text{ else } \langle x-3,\ x-2\rangle$$

a) Geben Sie den Argumentbereich der Prozedur an.
b) Geben Sie den Rekursionsbaum für das Argument 8 an.
c) Geben Sie den Definitionsbereich der Prozedur an.

Aufgabe 9.14 Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \\ &p(x,y) = \ \text{if } x < y \text{ then } p(x,\ y-1) \text{ else} \\ &\qquad\qquad\ \text{if } x > y \text{ then } p(x-1,\ y) \text{ else } x \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Rekursionsfolge und die Rekursionstiefe für p und $(-2,1)$ an.
b) Geben Sie die Rekursionsfunktion und die Rekursionsrelation von p an.
c) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.

Aufgabe 9.15 Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur *fib* die Gleichung $2 \cdot f(n+1) = f(n+3) - fn$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Zusatzaufgabe Z9.1 Geben Sie jeweils eine Prozedur $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Rekursionsrelation $\{(n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ an, sodass

a) p linear-rekursiv ist,
b) p baumrekursiv ist,
c) p die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ n$ berechnet,
d) p die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ 0$ berechnet.

Aufgabe 9.17 Machen Sie sich mithilfe der folgenden Beispiele klar, dass aus der Ergebnisfunktion einer Prozedur nicht ermittelt werden kann, welchen Argument- und Ergebnisbereich die Prozedur hat und ob sie rekursiv ist.

a) Geben Sie eine Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Ergebnisfunktion $\emptyset$ hat.
b) Geben Sie eine rekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ 0$ berechnet.

Aufgabe 9.20 Zeigen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &pn = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } p(n-1) + 2n + 1 \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ (n+1)^2$ berechnet.

Aufgabe 9.21 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \\ &p(x,y) = \ \text{if } x < y \text{ then } p(x,\ y-1) \text{ else} \\ &\qquad\qquad\ \text{if } x > y \text{ then } p(x-1,\ y) \text{ else } x \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\, (x,y) \in \mathbb{Z}^2.\ \min\{x,y\}$ berechnet.

Aufgabe 9.24 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ &p(x,y) = \ \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else} \\ &\qquad\qquad\ \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else} \\ &\qquad\qquad\ \text{if } x \le y \text{ then } p(x-1,\ y+1) \text{ else } p(x+1,\ y-1) \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\, (x,y) \in \mathbb{N}^2.\ x + y$ berechnet.

Aufgabe 9.26 Geben Sie eine rekursive Prozedur $p : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}_+$ die Summe $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}_+.\, n^2$ berechnet.

Aufgabe 9.29 Sie sollen zeigen, dass die Prozeduren

$$p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$p\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } p(x-1) + x$$

$$q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$q\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } \frac{x}{2}(x+1)$$

semantisch äquivalent sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Geben Sie natürliche Terminierungsfunktionen für p und q an.
b) Geben Sie die Ergebnisfunktion von q an.
c) Zeigen Sie, dass die Ergebnisfunktion von q die definierende Gleichung von p für alle $x \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

Aufgabe 9.30

a) Geben Sie den Rekursionsbaum für *am* und $(2, 2)$ an.
b) Geben Sie eine Prozedur an, die für $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ die Größe des Rekursionsbaums für *am* und (x, y) liefert.

Aufgabe 9.31 Geben Sie in der Relation Ter_2 einen Pfad der Länge 5 an, der vom Knoten $(1, 0)$ zum Knoten $(0, 0)$ geht.