9. Übungsblatt zu Programmierung 1, WS 2010/11

Prof. Dr. Gert Smolka, Christian Doczkal, M.Sc.
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws10/

Lesen Sie im Buch: Kapitel 10

Aufgabe 10.2 Dieter Schlau findet Induktionsbeweise toll. Zum Spaß versucht er zu zeigen, dass $2^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Und siehe da, nach einiger Zeit hat er einen Induktionsbeweis für diese Behauptung. Können Sie Dieter sagen, wo der Fehler in seinem Beweis steckt?

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 2^n = 1$.

Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $2^n = 2^0 = 1$.

Sei $n > 0$. Mit Induktion für $n-1$ und $n-2$ folgt $2^{n-1} = 1$ und $2^{n-2} = 1$. Also

$$2^n = \frac{2^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1\ .$$

Aufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass *iter* und die unten definierte Prozedur *iter′* semantisch äquivalent sind.

$$\begin{aligned}
&\mathit{iter}' : \mathbb{N} \times X \times (X \to X) \to X\\
&\mathit{iter}'(0, x, f) = x\\
&\mathit{iter}'(n, x, f) = f(\mathit{iter}'(n-1, x, f)) \quad \text{für } n > 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.4 Man kann Proposition 10.2 auch ohne die Benutzung der Vertauschungseigenschaft beweisen. Dazu zeigt man die allgemeinere Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall s \in \mathbb{Z}\colon\ \ \mathit{iter}(n, s, \lambda a.\, a \cdot x) = s \cdot x^n\ .$$

Beweisen Sie diese Aussage durch Induktion.

Aufgabe 10.13 (Hardtsche Identität) Betrachten Sie die Prozedur

$$\begin{aligned}
&p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\
&p\ 0\ =\ 0\\
&p\ 1\ =\ 1\\
&p\ n\ =\ p(n-1) + p(p(n-1) - p(n-2)) \quad \text{für } n > 1
\end{aligned}$$

Wegen der geschachtelten Rekursion lässt sich die Terminierung der Prozedur nicht ohne Information über die Ergebnisfunktion der Prozedur zeigen. Beweisen Sie durch natürliche Induktion, dass die Prozedur die Identitätsfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.\, n$ berechnet.

Aufgabe 10.14 Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$p(x, y) = 0 \quad \text{für } x > y$$
$$p(x, y) = x + p(x + 1, y) \quad \text{für } x \leq y$$

a) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.
b) Zeigen Sie durch Induktion: $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x \leq y\colon \quad p(x, y) = p(x, y - 1) + y$.

Aufgabe 10.15 Geben Sie für die Prozedur *rev* die Rekursionsfunktion, die Rekursionsrelation sowie eine natürliche Terminierungsfunktion an.

Aufgabe 10.16 Sei X eine Menge. Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass für alle Listen $xs, ys \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

a) $|xs@ys| = |xs| + |ys|$
b) $|rev\, xs| = |xs|$

Aufgabe 10.18 Die Länge von Listen lässt sich mit einer endrekursiven Prozedur bestimmen, die die folgende Funktion berechnet:

$$leni \in \mathbb{N} \to \mathcal{L}(X) \to \mathbb{N}$$
$$leni\ a\ xs\ =\ a + |xs|$$

Konstruieren Sie eine endrekursive Prozedur, die die Funktion *leni* berechnet und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Prozedur.

Aufgabe 10.19 Listen lassen sich mit einer endrekursiven Prozedur reversieren, die die folgende Funktion berechnet:

$$revi \in \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$$
$$revi\ xs\ ys\ =\ (rev\ ys) @ xs$$

Konstruieren Sie eine endrekursive Prozedur, die die Funktion *revi* berechnet und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Prozedur. Verwenden Sie dabei die Assoziativität der Konkatenation (Proposition 10.5).