II.Übungsblatt zur Vorlesung "Semantik von Programmiersprachen" SS 97

Prof. Gert Smolka und Martin Müller

Ausgabe: 24.4.1997 Abgabe: *Mo.* 5.5.1997

Aufgabe II.1(Einschrittsemantik Teil B (8 Punkte)) Wir betrachten erneut die Menge **AE** der arithmetischen Ausdrücke:

$$\begin{array}{rcl} \circ & ::= & + \mid * \mid - \\ a & ::= & n \mid a_1 \circ a_2 \\ n & \in & \mathbf{N} \end{array}$$

Die Ergebnissemantik $\rightarrow \subseteq \mathbf{AE} \times \mathbf{N}$ sei durch die folgenden zwei Regeln definiert.

$$n \rightarrow n \qquad \frac{a_1 \rightarrow n_1 \qquad a_2 \rightarrow n_2}{a_1 \circ a_2 \rightarrow n} \quad \text{falls } n = n_1 \circ n_2 \text{ über den ganzen Zahlen}$$

Die Einschritt-Semantik $\rightarrow_p \subseteq \mathbf{AE} \times \mathbf{AE}$ sei durch die folgenden drei Regeln definiert.

$$\frac{a_0 \rightarrow_p a_0'}{a_0 \circ a_1 \rightarrow_p a_0' \circ a_1} \qquad \frac{a_1 \rightarrow_p a_1'}{a_0 \circ a_1 \rightarrow_p a_0 \circ a_1'}$$

$$n_1 \circ n_2 \rightarrow_p n \quad \text{falls } n = n_1 \circ n_2 \text{ über den ganzen Zahlen}$$

Weiter sei $\rightarrow_p^*$ der transitive und reflexive Abschluß von $\rightarrow_p$. Beweisen Sie, daß für alle $a \in \mathbf{AE}$ und $n \in \mathbf{N}$: $a \rightarrow_p^* n$ *gdw.* $a \rightarrow n$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

1. Beweisen Sie, daß für alle $a_1, a_2 \in \mathbf{AE}$ und $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ gilt: Wenn $a_1 \rightarrow_p^* n_1$ und $a_2 \rightarrow_p^* n_2$, dann $a_1 \circ a_2 \rightarrow_p^* n$ wobei $n = n_1 \circ n_2$.
2. Beweisen Sie, daß für alle $a_1, a_2 \in \mathbf{AE}$ und $n \in \mathbf{N}$ gilt: Wenn $a_1 \rightarrow_p a_2$ und $a_2 \rightarrow n$, dann $a_1 \rightarrow n$.
3. Zeigen Sie mit (2), daß $a \rightarrow_p^* n$ falls $a \rightarrow n$.
4. Zeigen Sie mit (1), daß $a \rightarrow n$ falls $a \rightarrow_p^* n$.

Aufgabe II.2(Regelsysteme (4 Punkte))

1. Sei $R \subseteq \mathcal{P}_{fin}(B) \times B$ ein Regelssystem, und sei $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$ eine beliebige Kette in B. Zeigen Sie:
$$\bigcup_{n \in \omega} \widehat{R}(B_n) \;=\; \widehat{R}(\bigcup_{n \in \omega} B_n) \tag{1}$$
2. Geben Sie ein Regelsystem $R \subseteq \mathcal{P}(B) \times B$ an, bei dem mindestens eine Regel unendlich viele Prämissen hat, und für das die Gleichung (1) *nicht* gilt. Tip: Wählen Sie $B = \mathbf{N} \dot\cup \{\infty\}$.

Aufgabe II.3(4 Punkte) Seien $(M, \leq_M)$ und $(N, \leq_N)$ zwei partiell geordnete Mengen. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *monoton* falls

$$\forall a, b \in M : a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Ein Element $a \in M$ heißt *kleinste obere Schranke* (oder *Supremum*) einer Teilmenge $A \subseteq M$ genau dann, wenn

1. $\forall b \in A : b \leq a$ 2. $\forall c \in M : (\forall b \in A : b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

Sei $\mathbf{N}_\perp$ die Menge $\mathbf{N} \cup \{\perp\}$. Auf $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ betrachten wir die partielle Ordnung

$$f \leq g \text{ gdw. } \forall n \in \mathbf{N} : f(n) \neq \perp \Rightarrow f(n) = g(n)$$

Sei $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$ eine Kette in $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$. Dann können wir eine Funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ wie folgt definieren:

$$f(n) = \begin{cases} m & \exists i \geq 0 : f_i(n) = m,\ m \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f ist wohldefiniert.
2. f ist eine obere Schranke der Kette $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$.
3. f ist die kleinste obere Schranke der Kette $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$.

Ist f monoton?

Aufgabe II.4(4 Punkte) Auf $\mathbf{N}_\perp$ definieren wir die partielle Ordnung

$$n \leq m \text{ gdw. } n = m \vee n = \perp .$$

Sei $G : (\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp) \to \mathbf{N}_\perp$ wie folgt definiert:

$$G(f) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(n) \neq \perp \text{ für alle } n \in \mathbf{N} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle $i \geq 0$ sei $h_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ durch

$$h_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq i \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

1. G ist monoton.
2. $h_0 \leq h_1 \leq \ldots$ ist eine Kette in $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$.
3. Sei h das Supremum der Kette $h_0 \leq h_1 \leq \ldots$. Bestimmen Sie $G(h)$.
4. Bestimmen Sie $G(h_i)$ für alle i.
5. Bestimmen Sie das Supremum der Kette $G(h_1) \leq G(h_2) \leq \ldots$ für alle i.

Was berechnet G?