III. Übungsblatt zur Vorlesung
"Semantik von Programmiersprachen" SS 97

Prof. Gert Smolka und Martin Müller

Ausgabe: 5.5.1997 Abgabe: 12.5.1997

Aufgabe III.1(4 Punkte)

1. Welche der folgenden partiellen Ordnungen sind vollständig und warum bzw. warum nicht?
   (a) Die Menge $\{a, b\}^*$ mit $v \sqsubseteq w$, falls v ein Präfix von w ist.
   (b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M mit der Teilmengenrelation $\subseteq$.
2. Zeigen Sie: Wenn $(D, \sqsubseteq)$ eine VPO ist und M eine Menge, dann ist der Funktionenraum $M \to D$ mit der punktweisen Ordnung ($f \leq g$ falls $\forall x \in M : f(x) \leq g(x)$) vollständig.

Aufgabe III.2(4 Punkte) Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und sei F eine Menge von monotonen Funktionen $f : D \to D$. Eine *Spur* sei ein Tupel $(a_0, \ldots, a_n)$ über D mit

1. $\forall i, 0 \leq i < n : a_i \sqsubseteq a_{i+1}$
2. $\forall i, 0 \leq i < n : \exists f \in F : a_{i+1} = f(a_i)$
3. $\forall f \in F : f(a_n) = a_n$

Zeigen Sie, daß alle Spuren, die mit dem gleichen Element beginnen, auch mit dem gleichen Element enden.

Aufgabe III.3(4 Punkte) Eine VPO $(D, \sqsubseteq)$ heiße *stationär*, wenn es für jede ω-Kette $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots$ in D ein n gibt, so daß $d_n = d_m$ für alle $m \geq n$. Es seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ zwei VPO's. Zeigen Sie: Wenn D stationär ist, dann ist jede monotone Funktion $f : D \to E$ stetig.

Aufgabe III.4(2 Punkte) Geben Sie eine VPO D an ohne kleinstes Element und eine stetige Funktion $f : D \to D$, die keinen *kleinsten* Fixpunkt hat.

Aufgabe III.5(4 Punkte) Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine VPO und seien $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \ldots$ und $b_0 \sqsubseteq b_1 \sqsubseteq \ldots$ zwei ω-Ketten in D. Zeigen Sie:

1. Wenn $\forall n \in \omega : a_n \sqsubseteq b_n$, dann $\bigsqcup_{i \in \omega} a_i \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in \omega} b_i$.

2. Wenn $\forall i \in \omega \exists j, k \in \omega : a_i \sqsubseteq b_j$ und $b_i \sqsubseteq a_k$, dann $\bigsqcup_{i\in\omega} a_i = \bigsqcup_{i\in\omega} b_i$.

Aufgabe III.6(2 Punkte) Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine VPO und seien $f : D \to D$ und $g : D \to D$ stetig. Zeigen Sie, daß auch $f \circ g$ stetig ist.

Aufgabe III.7(4 Punkte) Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine VPO mit $\perp$, und seien $f : D \to D$ und $g : D \to D$ zwei stetige Funktionen. Dann sind die Funktionen $f \circ g : D \to D$ und $g \circ f : D \to D$ stetig und es existieren ihre kleinsten Fixpunkte $fix(f \circ g)$ und $fix(g \circ f)$. Zeigen Sie, daß

$$fix(f \circ g) \;=\; f(fix(g \circ f))$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie die Definition des kleinsten Fixpunktes einer stetigen Funktion und verwenden Sie Aussage 2 von Aufgabe III.5.