IV.Übungsblatt zur Vorlesung
"Semantik von Programmiersprachen" SS 97

Prof. Gert Smolka und Martin Müller

Ausgabe: 12.5.1997 Abgabe: 22.5.1997

Aufgabe IV.1(4 Punkte) Sei $(M, \leq)$ eine VPO mit $\perp$. Wir betrachten den Funktionenraum $M \to M$ mit der üblichen punktweisen Ordnung. Sei $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$ eine ω-Kette in $M \to M$ und sei $g : M \to M$ beliebig. Zeigen Sie:

1. $f_0 \circ_\perp g \leq f_1 \circ_\perp g \leq \ldots$ ist ω-Kette in $M \to M$.
2. $(\bigsqcup_{i \in \omega} f_i) \circ_\perp g \; = \; \bigsqcup_{i \in \omega} (f_i \circ_\perp g)$

Aufgabe IV.2(4 Punkte) In der Vorlesung wurde für alle $b \in \mathbf{Bexp}$ und $c \in \mathbf{Com}$ die Funktion $\gamma_{b,c} : (\Sigma \to \Sigma_\perp) \to (\Sigma \to \Sigma_\perp)$ definiert.

$$\gamma_{b,c} \; = \; \lambda\varphi{:}\Sigma{\to}\Sigma_\perp.\ \lambda\sigma{:}\Sigma.\ \mathrm{if}(\ \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma,\ (\varphi \circ_\perp \mathcal{C}[\![c]\!])\sigma,\ \sigma)$$

Die denotationale Semantik der **while**-Schleife ist damit wie folgt definiert.

$$\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!] \; = \; \bigsqcup_{i \in \omega} \gamma^i_{b,c}(\lambda\sigma.\perp)$$

1. Zeigen Sie: $\forall b \in \mathbf{Bexp}, c \in \mathbf{Com}$: $\gamma_{b,c}$ ist stetig.
2. Folgern Sie daraus: $\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!] \; = \; \gamma_{b,c}(\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!])$

Aufgabe IV.3(4 Punkte) Zeigen Sie $\forall c \forall \sigma \forall \sigma' : (c, \sigma) \to \sigma' \Rightarrow \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma = \sigma'$ durch Regelinduktion.

Aufgabe IV.4(4 Punkte) Geben sie Formeln $KGV, PRIM \in \mathbf{Assn}$ an, die ausdrücken, daß i das kleinste gemeinsame Vielfache von j und k ist, beziehungsweise daß i prim ist. Das heißt es soll gelten:

1. $\sigma \models^I KGV$ gdw. $I(i)$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache von $I(j)$ und $I(k)$
2. $\sigma \models^I PRIM$ gdw. $I(i)$ ist eine Primzahl

Aufgabe IV.5(4 Punkte) Für beliebige $i, j \in \mathbf{Intvar}$ ist die Substitution $[i/j] : \mathbf{Aexpv} \to \mathbf{Aexpv}$ diejenige Funktion auf arithmetischen Ausdrücken die jedes $a \in \mathbf{Aexpv}$ auf $a[i/j]$ abbildet. Für zwei Substitutionen $[i/i']$ und $[j/j']$ ist deren Komposition $[i/i'] \circ [j/j']$ wie üblich definiert ("erst $[i/i']$, dann $[j/j']$"). Zeigen Sie:

$$\forall i, j, k, k' \in \mathbf{Intvar} : \quad i \notin \{k, k'\} \wedge j \neq k \;\Rightarrow\; [j/i] \circ [k'/k] = [k'/k] \circ [j/i]$$

Aufgabe IV.6(4 Zusatzpunkte) Berechnen Sie den kleinsten Fixpunkt der Funktion $F : (\mathbf{N}_\perp \to \mathbf{N}_\perp) \to (\mathbf{N}_\perp \to \mathbf{N}_\perp)$ mit

$$F(f)(x) \;=\; \begin{cases} x - 10 & \text{falls } x > 100 \\ f(f(x + 11)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten Sie dabei die punktweise Ordnung auf $\mathbf{N}_\perp \to \mathbf{N}_\perp$ wobei, wie in Aufgabe $II.3$ auf $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ definiert:

$$f \leq g \quad \text{gdw.} \quad \forall n \in \mathbf{N}_\perp : f(n) \neq \perp \Rightarrow f(n) = g(n)$$

Sie dürfen weiter annehmen, daß F stetig ist.