VII.Übungsblatt zur Vorlesung
"Semantik von Programmiersprachen" SS 97

Prof. Gert Smolka und Martin Müller

Ausgabe: 5.6.1997 Abgabe: 12.6.1997

Auf diesem Blatt verwenden wir die folgenden Notationen aus dem Winskel. $\{c\}$ bezeichnet die durch eine **Imp**-Anweisung c realisierte partielle Funktion in dem Sinne, daß

$$\{c\}(n_1, \dots, n_k) \;=\; \begin{cases} \sigma(X_1) & \text{falls } \sigma = \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma_0[n_1/X_1]\dots[n_k/X_k] \\ \text{undefiniert} & \text{falls } \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma_0[n_1/X_1]\dots[n_k/X_k] \text{ undefiniert ist} \end{cases}$$

wobei σ_0 der Speicher ist, der alle Lokationen auf 0 abbildet. Wir schreiben $\{c\}(n)\downarrow$ falls $\{c\}(n)$ definiert ist und $\{c\}(n)\uparrow$ andernfalls. Weiter bezeichne $\overline{M}$ das Komplement einer Menge M.

Aufgabe VII.1(Gödelnumerierung, 4 Punkte)(Winskel, Seite 340, Aufgabe A8) Wir interessieren uns für die ganzzahligen Funktionen *mkpair*, *sg*, *left* und *right*, die für alle ganzen Zahlen n, m wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} sg(n) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } n \geq 0 \\ 0 & \text{falls } n < 0 \end{cases} \\ mkpair(n,m) &= 2^{sg(n)} * 3^{|n|} * 5^{sg(m)} * 7^{|m|} \\ left(mkpair(n,m)) &= n \\ right(mkpair(n,m)) &= m \end{aligned}$$

1. Geben Sie **Imp**-Anweisungen *Mkpair*, *Sg*, *Left* und *Right* an, so daß für alle ganzen Zahlen n, m gilt:
$$\begin{aligned} \{Sg\}(n) &= sg(n) \\ \{Mkpair\}(n,m) &= mkpair(n,m) \\ \{Left\}(n) &= left(n) \\ \{Right\}(n) &= right(n) \end{aligned}$$

2. Sei c eine erweiterte **Imp**-Anweisung, in der Zuweisungen der Form $X{:=}left(Y)$ vorkommen dürfen. Beschreiben Sie, wie Sie c in **Imp** bis auf temporäre Lokationen simulieren können.

3. Wir erweitern **AExp** um arithmetische Ausdrücke der Form $mkpair(a_1,\, a_2)$, $left(a)$ und $right(a)$, wobei auch a_1, a_2 und a solche erweiterten Ausdrücke sind. Erklären Sie, wie Sie die Auswertung von diesen arithmetischen Ausdrücken in **Imp** simulieren können. Wie simulieren Sie Anweisungen, die solche erweiterten Ausdrücke enthalten?

Aufgabe VII.2(Entscheidbarkeit, 2 Punkte)

Zeigen Sie: Die Menge $\{c \mid \forall n \in \mathbf{N} : \{c\}(n) \downarrow\}$ ist nicht **Imp**-entscheidbar.

Aufgabe VII.3(Gödelnumerierung, 2 Punkte)(Winskel, Aufgabe A.9) Beschreiben Sie eine **Imp**-Anweisung, die entscheidet, ob $n \in \mathbf{N}$ die Gödelnummer einer **Imp**-Anweisung ist oder nicht. Mit anderen Worten, zeigen Sie die **Imp**-Entscheidbarkeit der Menge $\{c \mid c \in \mathbf{Com}\}$.

Aufgabe VII.4(Testbarkeit, 4 Punkte)(Winskel, Aufgabe A.13)

Es sei $H_0 = \{c \in \mathbf{Com} \mid \{c\}(0) \downarrow\}$.

1. Beschreiben Sie eine **Imp**-Anweisung C, die zu einer eingegebenen Gödelnummer $\#c$ einer Anweisung c das minimale k ausgibt, so daß bei der Ausführung von c höchstens die Lokationen $X_1, \ldots, X_k$ verwendet werden. Zeigen Sie, daß es daher eine **Imp**-berechenbare Funktion gibt, die zu einer Eingabe $\#c$ die Gödelnummer der Anweisung
$$clear_c \; = \; X_1 := 0; X_2 := 0; \ldots ; X_k := 0$$
ausgibt, die alle Lokationen aus c zurücksetzt.

2. Es sei $D = \{c \in \mathbf{Com} \mid \forall \sigma : \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma = \bot\}$. Verwenden Sie (1) und die Nichttestbarkeit von $\overline{H}_0$ um zu zeigen, daß D nicht testbar ist.

Aufgabe VII.5(Berechenbarkeit, 2 Punkte) Wir definieren eine eingeschränkte Menge $\mathbf{Assn}^-$ von arithmetischen Ausdrücken als die Menge der $a \in \mathbf{Aexpr}$ die keine Multiplikation enthalten. Man bezeichnet diese Menge auch als *Presburger-Arithmetik*. Presburger hat 1929 gezeigt, daß die Gültigkeit von Assertionen aus $\mathbf{Assn}^-$ entscheidbar ist. Zeigen Sie: Die Menge der gültigen Hoare-Tripel für diese Einschränkung der Arithmetik ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe VII.6(Ricesches Theorem, 4 Zusatzpunkte) Wir bezeichnen $C \subseteq \mathbf{Com}$ als

- *nichttrivial* falls $C \neq \emptyset$ und $C \neq \mathbf{Com}$, und als
- *extensional* falls $\forall c, d \in \mathbf{Com} : \{c\} = \{d\} \Rightarrow (c \in C \Leftrightarrow d \in C)$.

Zeigen Sie:

Jede nichttriviale extensionale Teilmenge von **Com** is **Imp**-unentscheidbar.

Hinweis: Sei $C \subseteq \mathbf{Com}$ nichttrivial und extensional. Betrachten Sie ein überall divergierendes Programm *div* und nehmen Sie zunächst an, daß $div \in C$. Bestimmen Sie zwei Anweisungen c und d so, daß $\{c\}(\#c) \uparrow$ genau dann wenn $d \in C$.