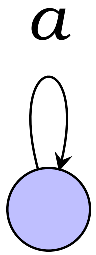
Verhaltensäquivalenzen für CCS

Theorie kommunizierender Systeme

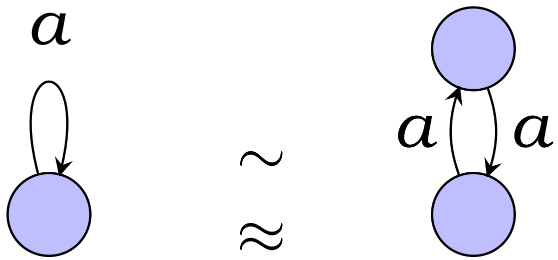
Holger Dell
Betreuer: Tim Priesnitz
Lehrstuhl für Programmiersysteme - Prof. Gert Smolka

Motivation



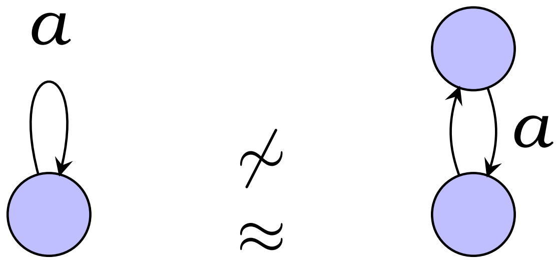
Motivation

Motivation



Motivation

Motivation

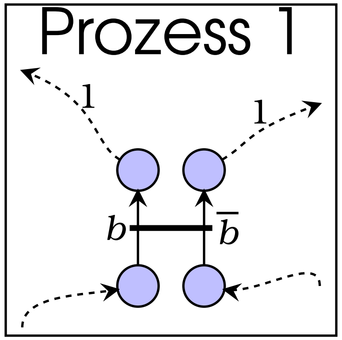


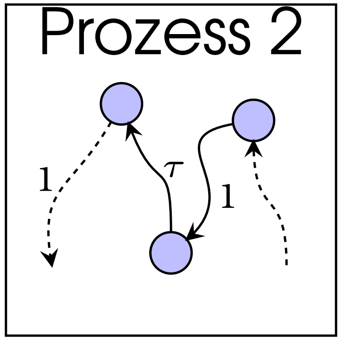
Inhalt

Gleichheitstheorie

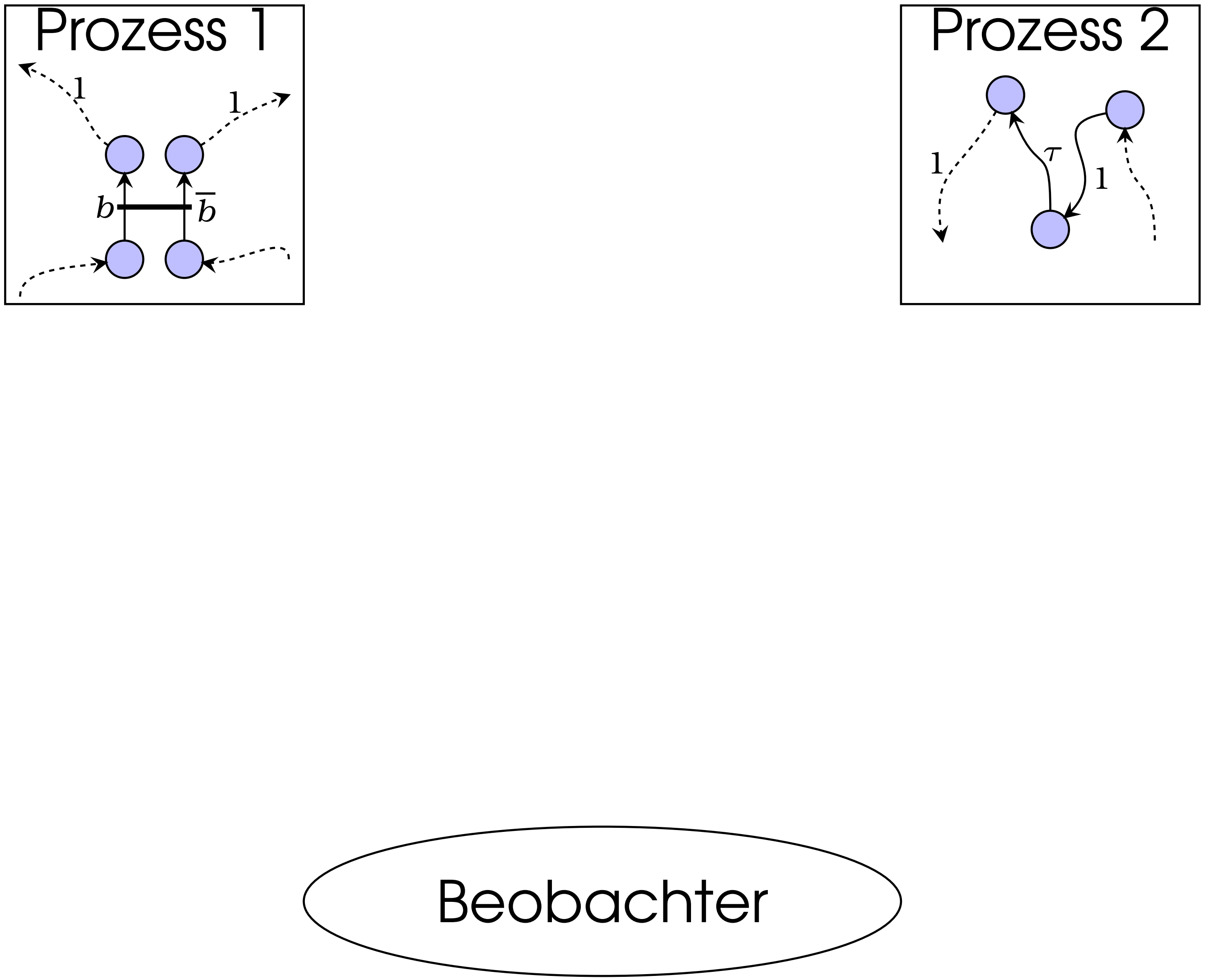
- Beobachtungen
- starke Äquivalenz
- schwache Äquivalenz

Beobachtungen

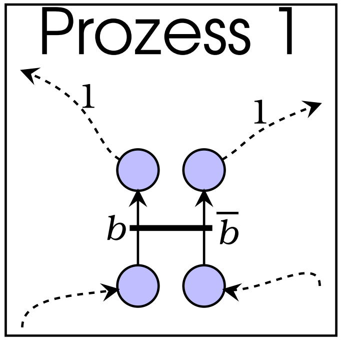




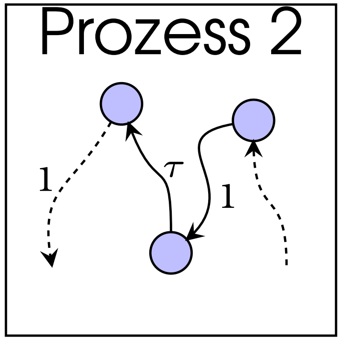
Beobachtungen



Beobachtungen

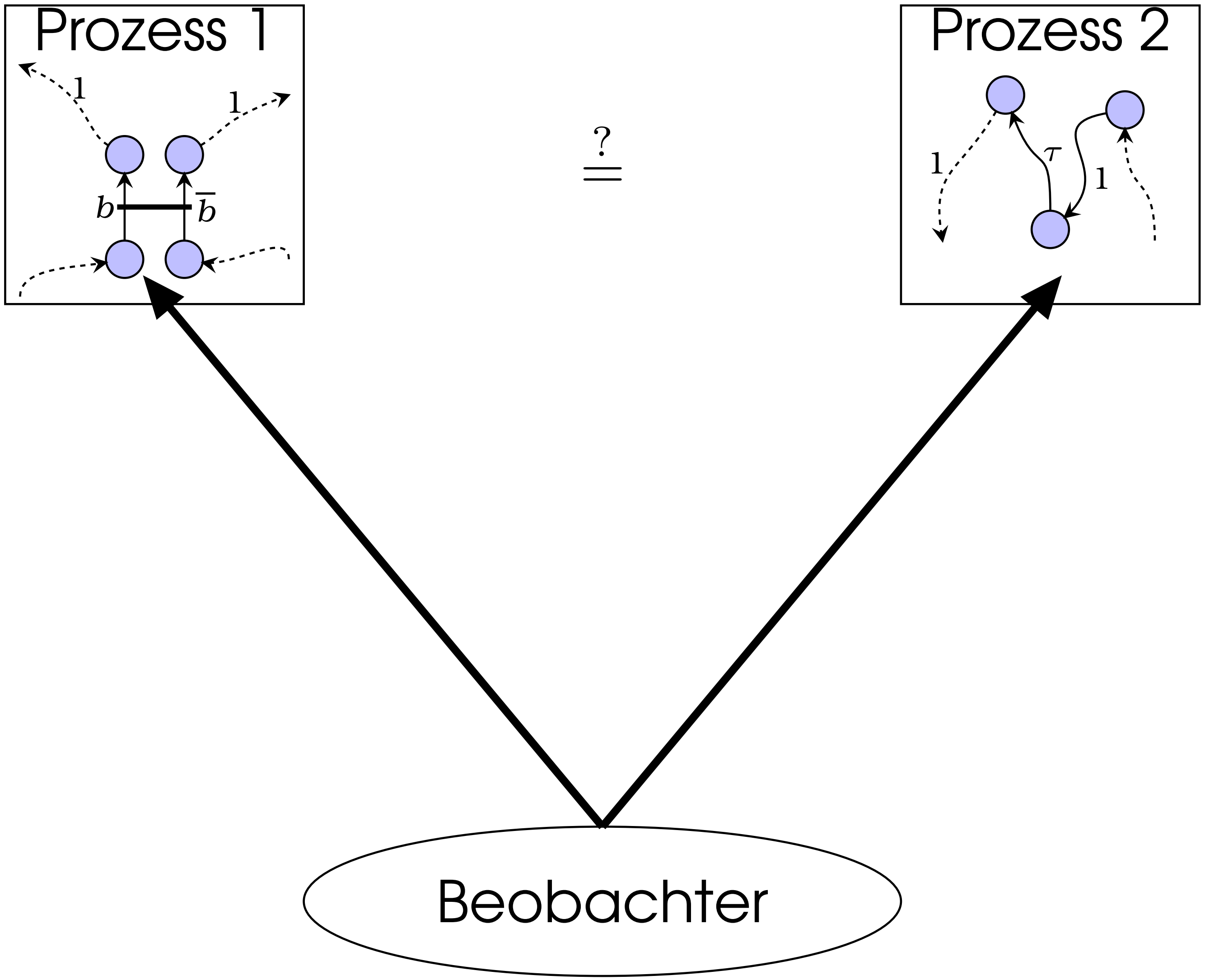


$\stackrel{?}{=}$

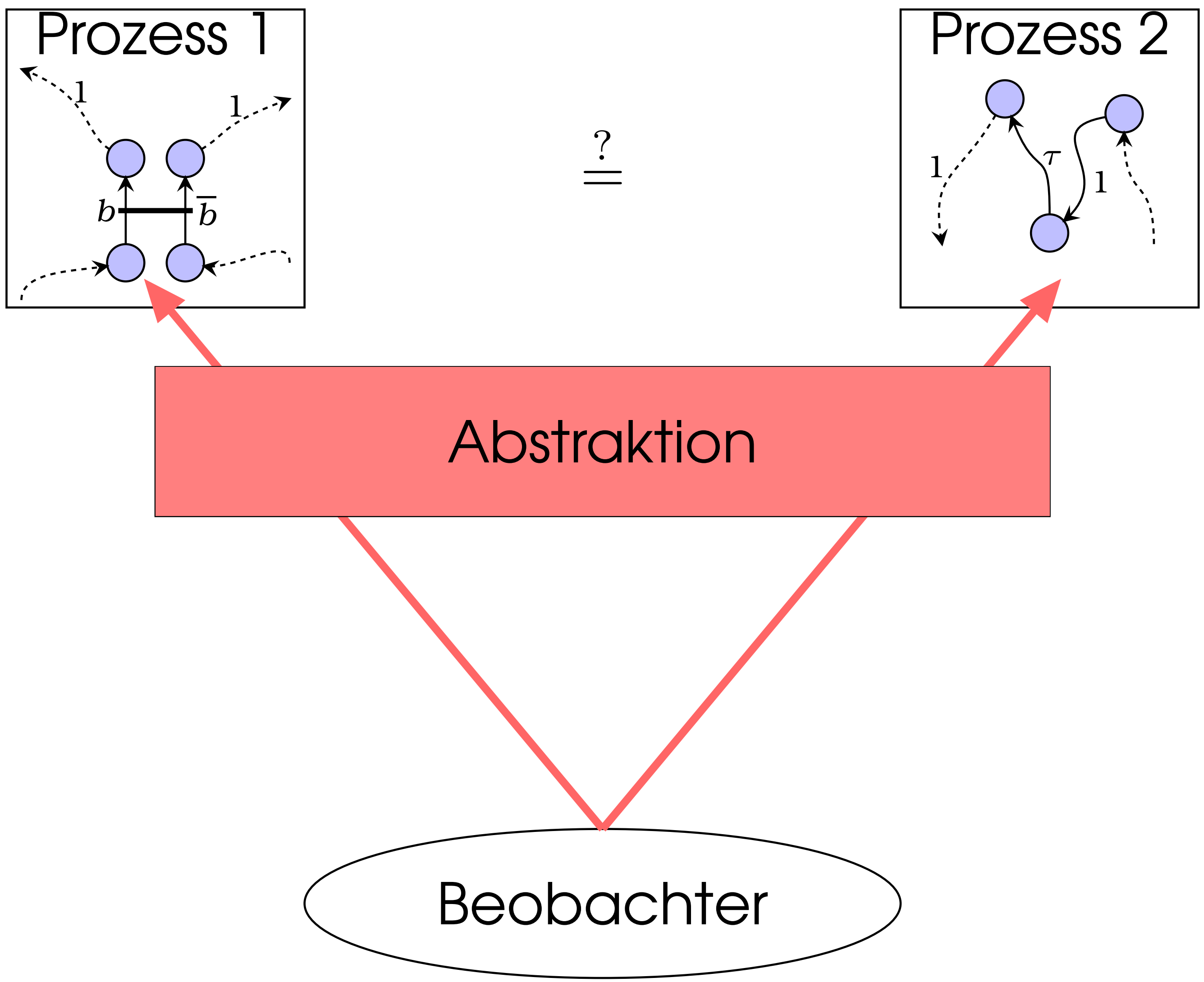


Beobachter

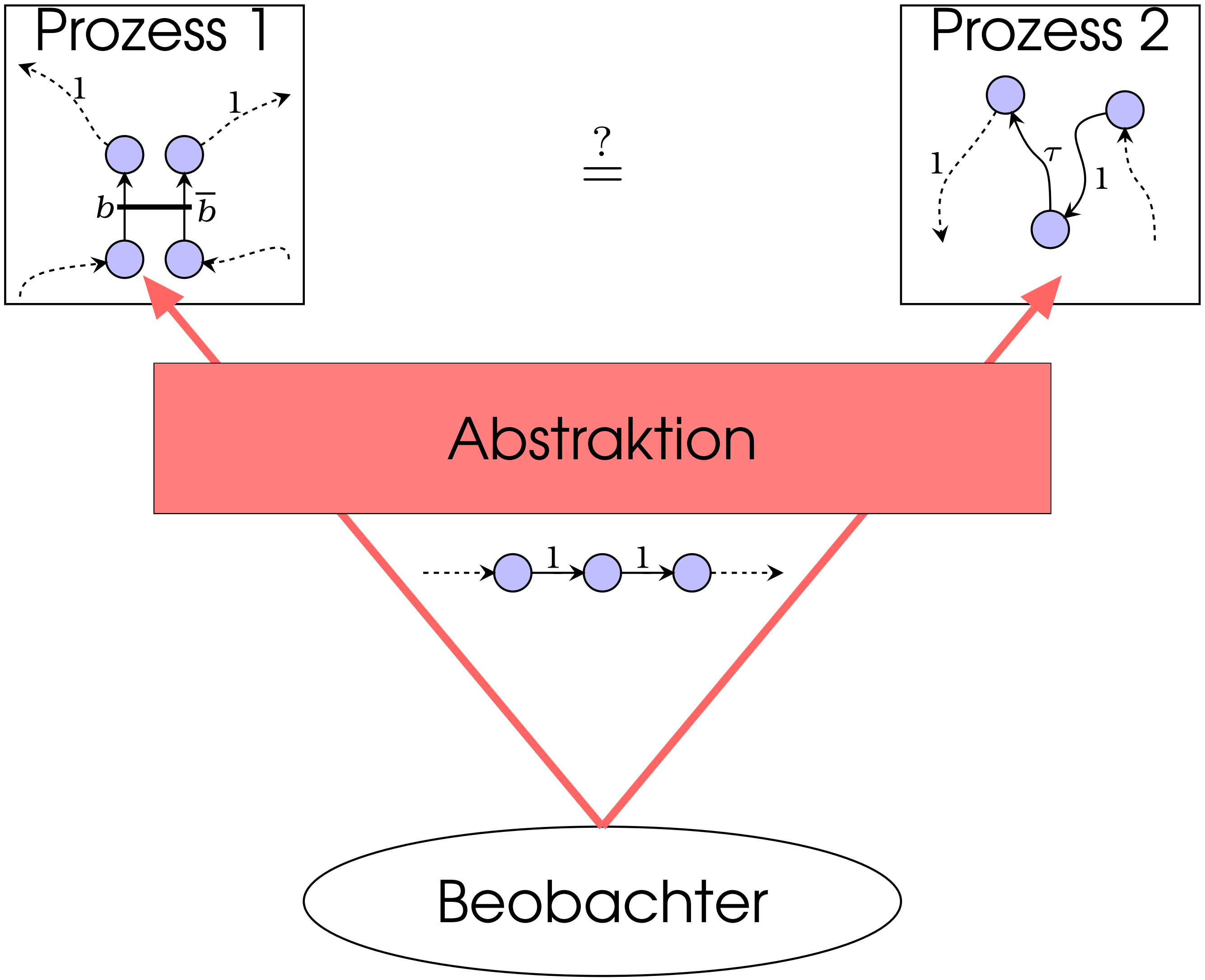
Beobachtungen



Beobachtungen



Beobachtungen



Verhaltensäquivalenzen

zwei Ansätze

Verhaltensäquivalenzen

$\sim, \approx$

Verhaltensäquivalenzen

zwei Ansätze

operationale Semantik

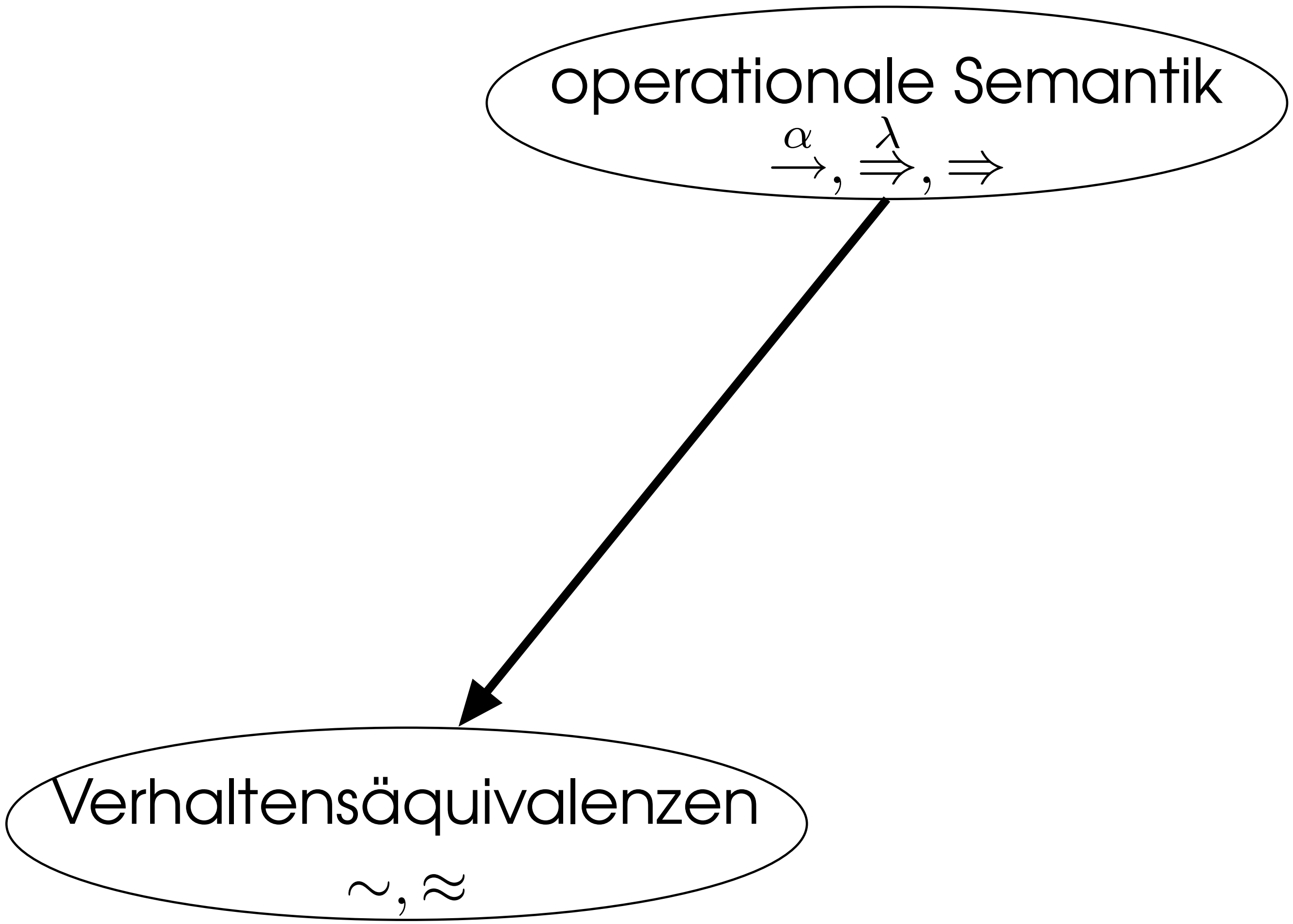
$\xrightarrow{\alpha}, \overset{\lambda}{\Longrightarrow}, \Longrightarrow$

Verhaltensäquivalenzen

$\sim, \approx$

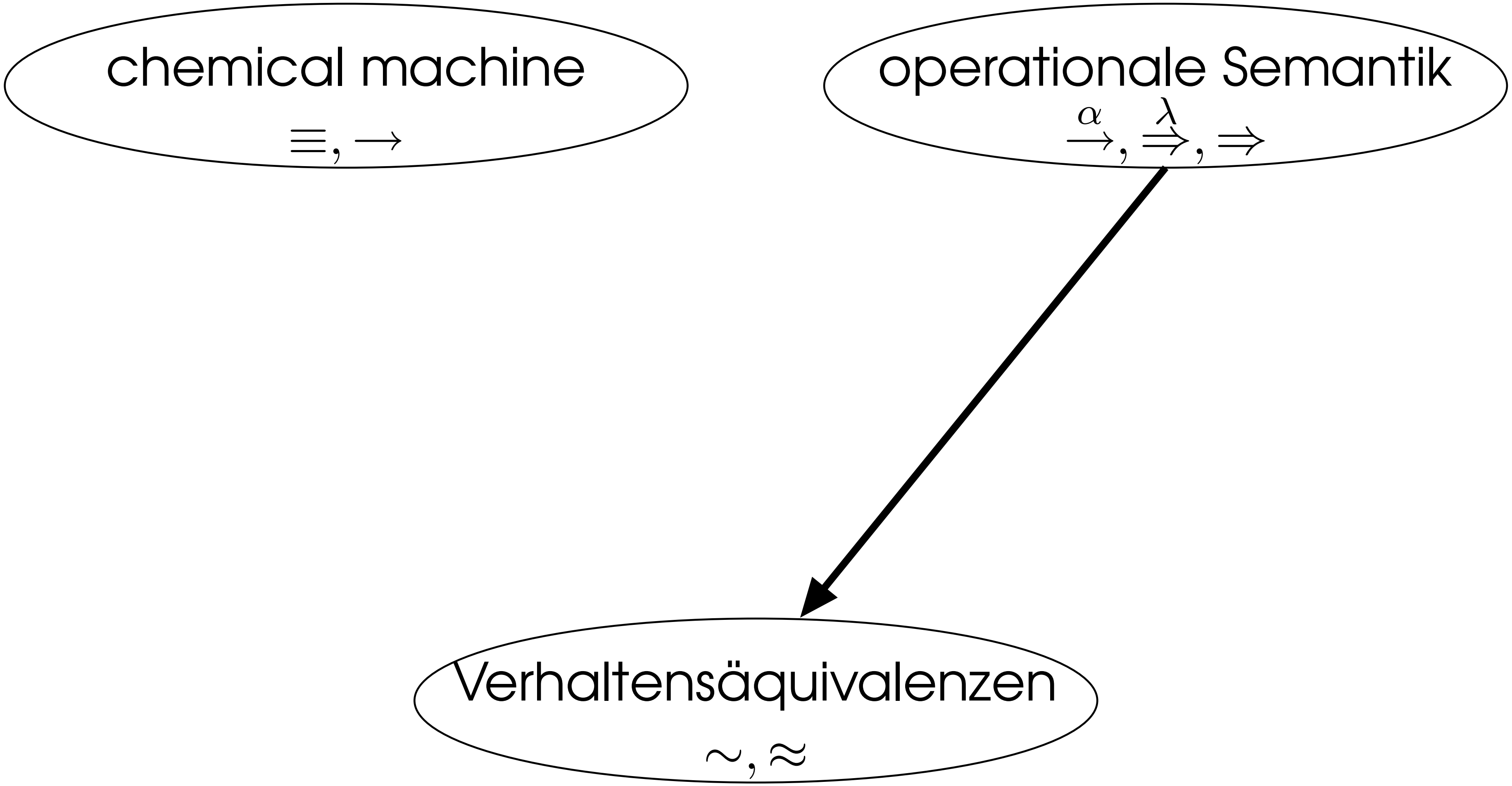
Verhaltensäquivalenzen

zwei Ansätze



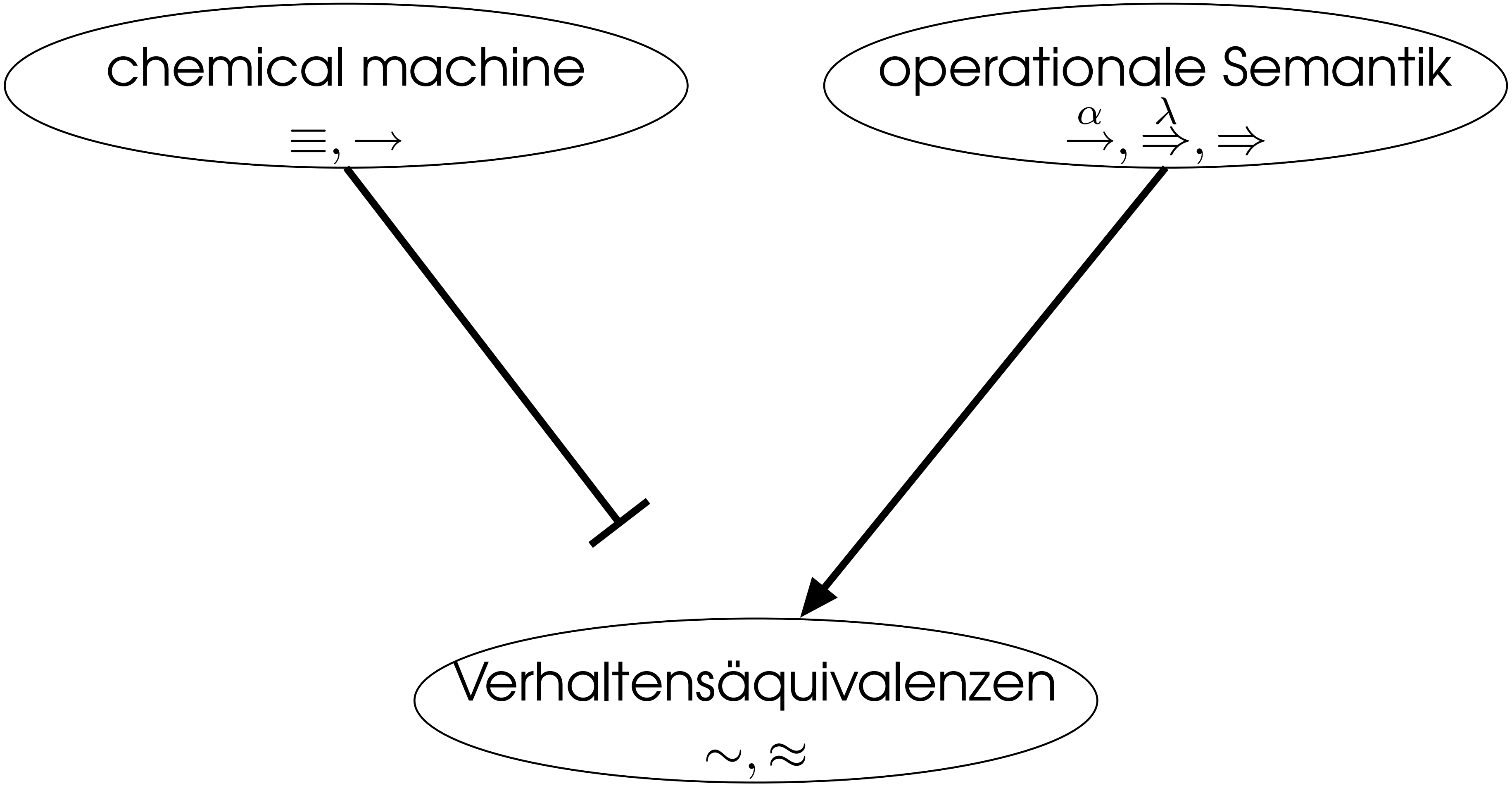
Verhaltensäquivalenzen

zwei Ansätze



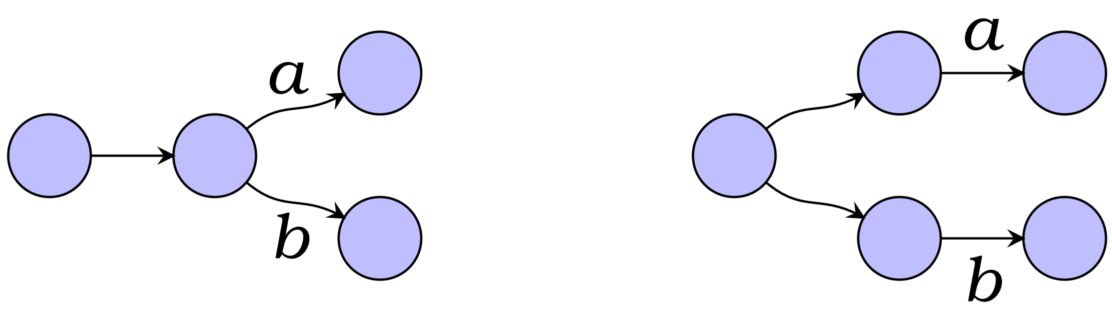
Verhaltensäquivalenzen

zwei Ansätze

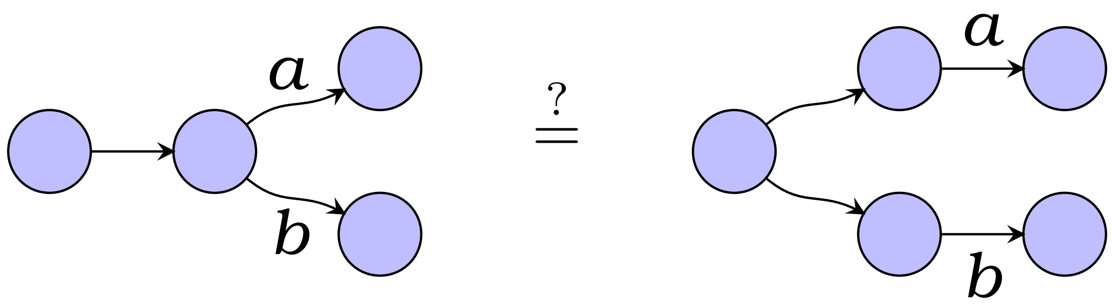


Motivation: starke/schwache Äquivalenz

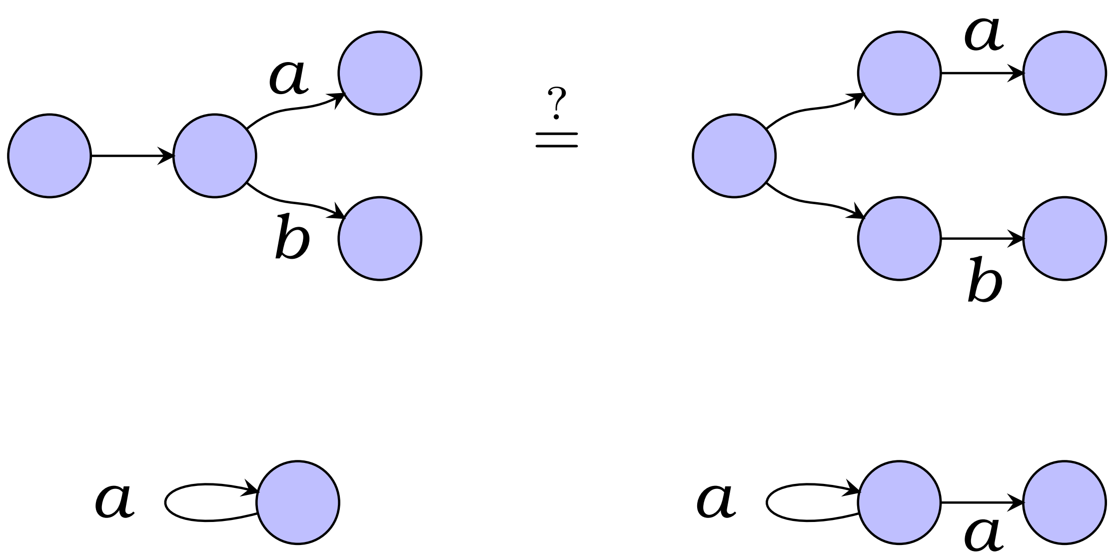
Motivation: starke/schwache Äquivalenz



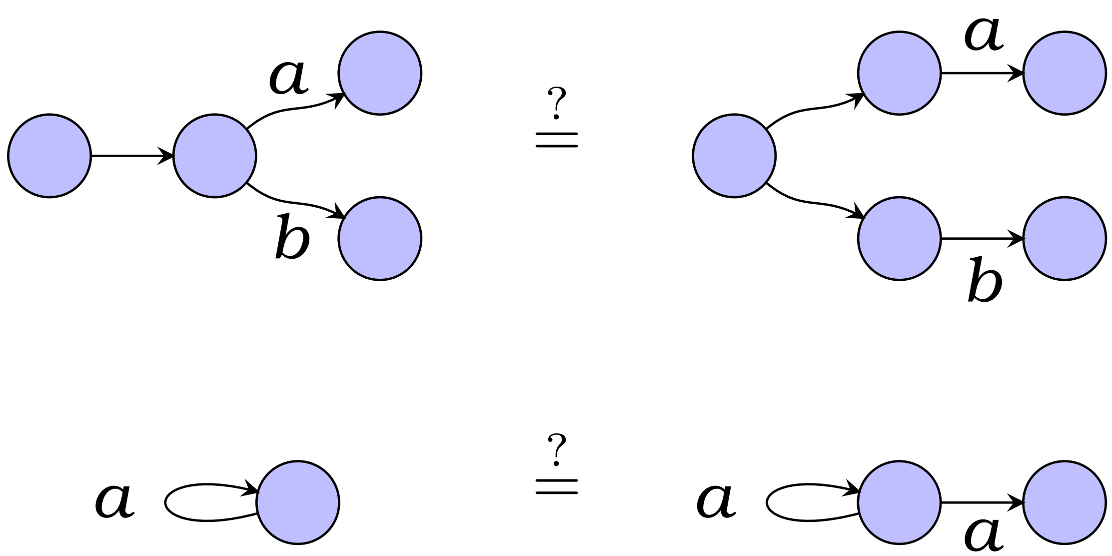
Motivation: starke/schwache Äquivalenz



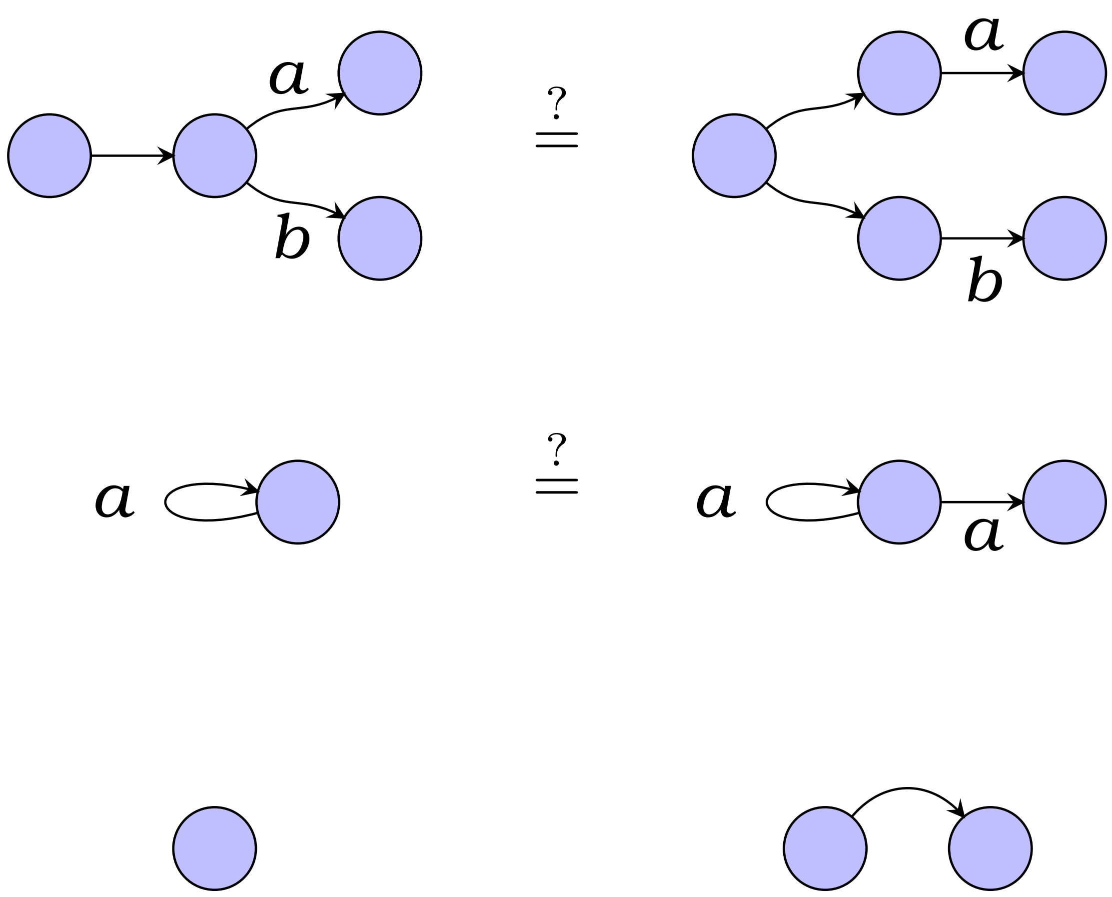
Motivation: starke/schwache Äquivalenz



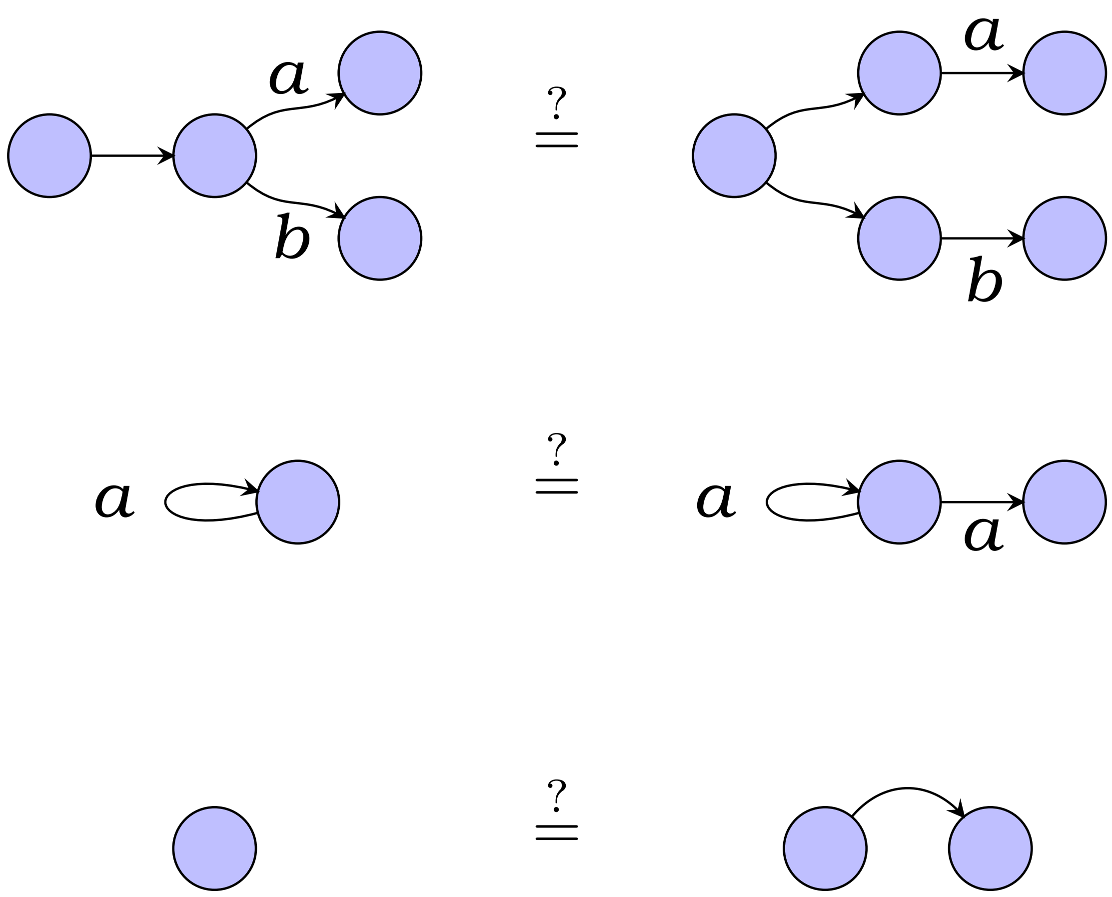
Motivation: starke/schwache Äquivalenz



Motivation: starke/schwache Äquivalenz



Motivation: starke/schwache Äquivalenz



starke Äquivalenz ($P \sim P'$)

Definition

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)

Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \sim P'$ definiert über Bisimulationen:

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \sim P'$ definiert über Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt Simulation:

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \sim P'$ definiert über Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt Simulation:
    für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd}$$

existiert R' mit

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$

starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \sim P'$ definiert über Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt Simulation:
    für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd}$$

existiert R' mit

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$

  - Definition: $\mathcal{S}$ Bisimulation:
    $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ Simulationen

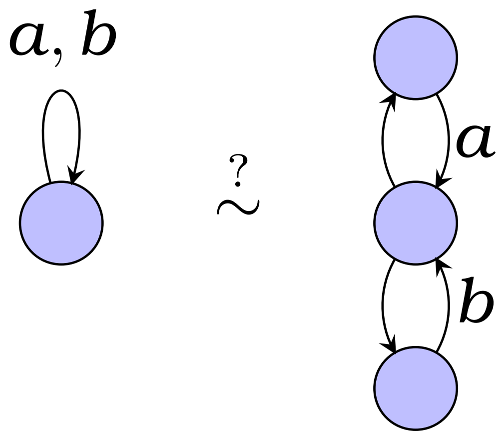
starke Äquivalenz ($P \sim P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten.
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \sim P'$ definiert über Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt Simulation:
    für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

    $$\begin{array}{ccc} P & \overset{\mathcal{S}}{\text{———}} & P' \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \\ R & & \end{array} \quad \text{existiert } R' \text{ mit} \quad \begin{array}{ccc} & & P' \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ R & \overset{\mathcal{S}}{\text{———}} & R' \end{array}$$

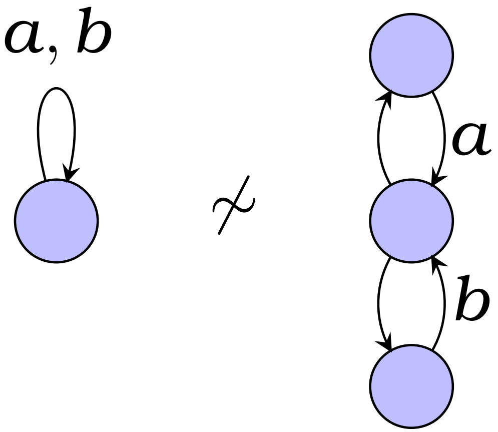
  - Definition: $\mathcal{S}$ Bisimulation:
    $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ Simulationen
  - Definition: $P \sim P'$:
    es gibt eine Bisimulation $\mathcal{S}$ mit $P\mathcal{S}P'$

Beispiel: starke Äquivalenz ($\sim$)
Lotterien

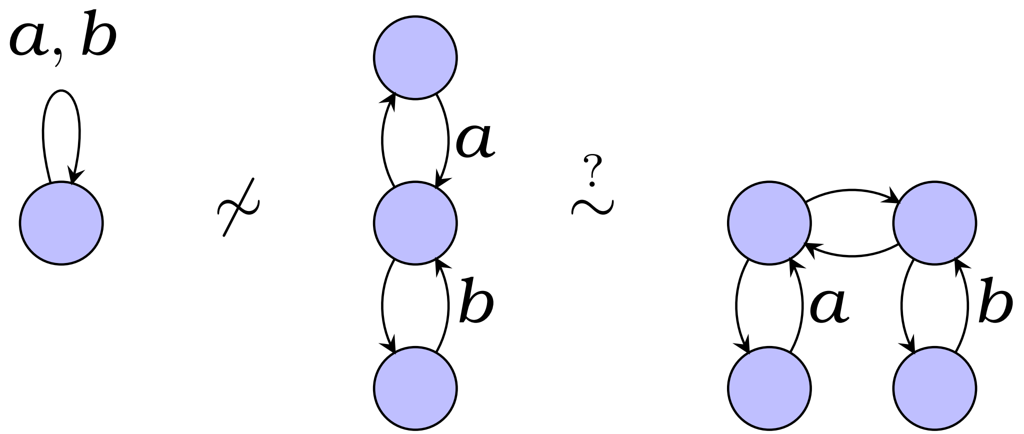


Beispiel: starke Äquivalenz ($\sim$)

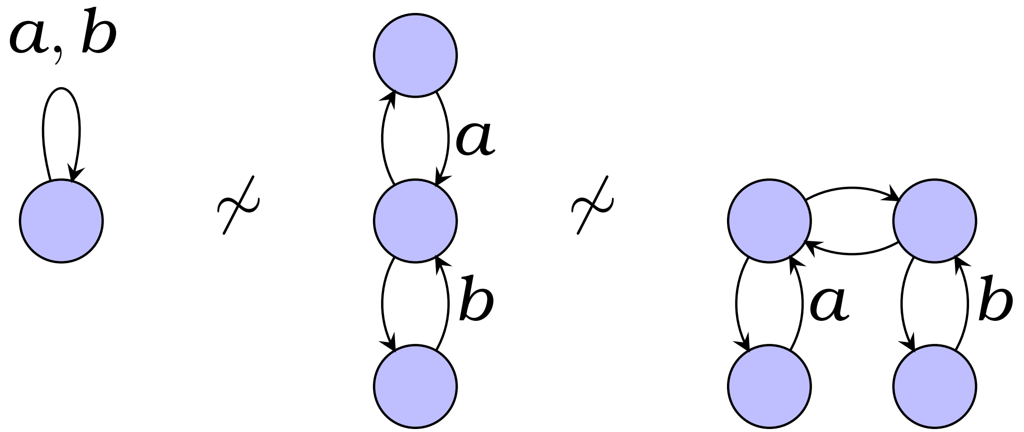
Lotterien



Beispiel: starke Äquivalenz ($\sim$)
Lotterien



Beispiel: starke Äquivalenz ($\sim$)
Lotterien



Review: starke Äquivalenz ($P \sim P'$)

Definition

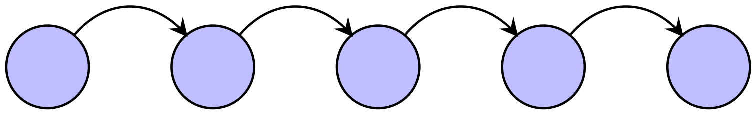
- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \sim P'$ definiert über Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt Simulation:
    für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

    $$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd}$$

    existiert R' mit

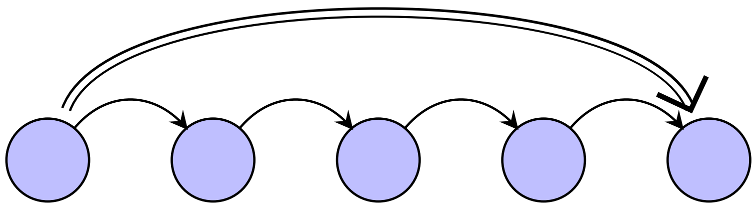
    $$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$
  - Definition: $\mathcal{S}$ Bisimulation:
    $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ Simulationen
  - Definition: $P \sim P'$:
    es gibt eine Bisimulation $\mathcal{S}$ mit $P\mathcal{S}P'$

Reparatur der Definition



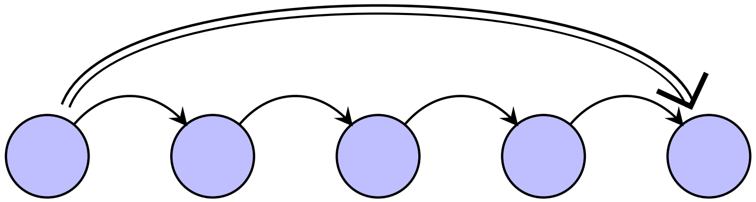
$\longrightarrow^{*}$

Reparatur der Definition

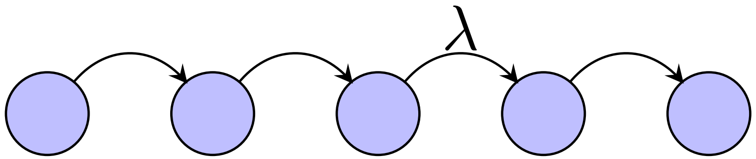


$$\Rightarrow \quad := \quad \longrightarrow^*$$

Reparatur der Definition

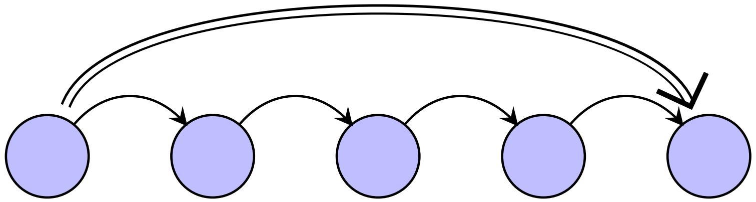


$$\Rightarrow \quad := \quad \rightarrow^*$$

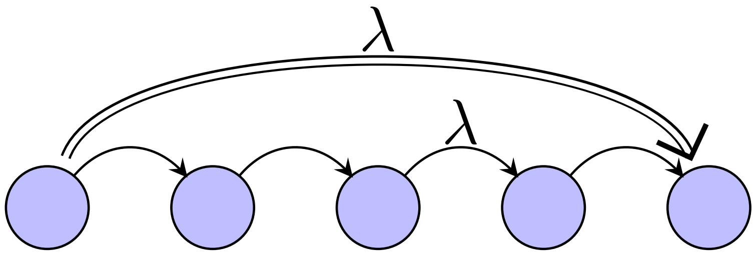


$$\Rightarrow \xrightarrow{\lambda} \Rightarrow$$

Reparatur der Definition

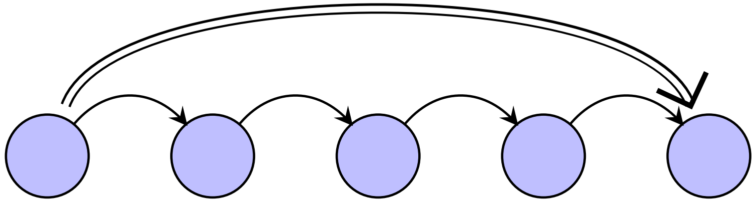


$$\Rightarrow \quad := \quad \rightarrow^*$$

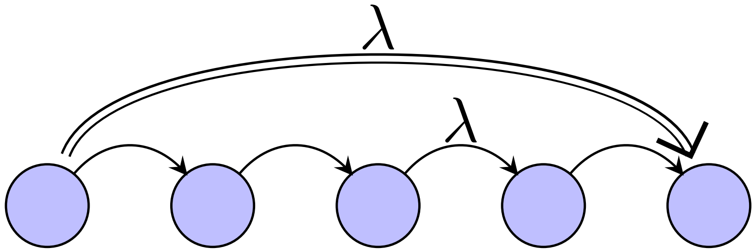


$$\overset{\lambda}{\Rightarrow} \quad := \quad \Rightarrow \xrightarrow{\lambda} \Rightarrow$$

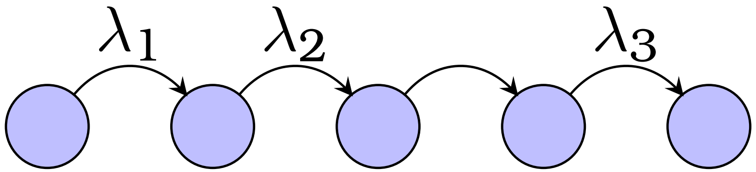
Reparatur der Definition



$$\Rightarrow \quad := \quad \rightarrow^*$$

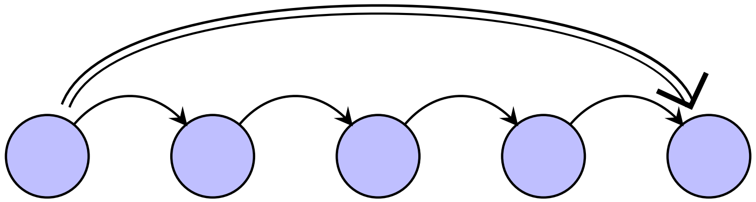


$$\stackrel{\lambda}{\Rightarrow} \quad := \quad \Rightarrow\xrightarrow{\lambda}\Rightarrow$$

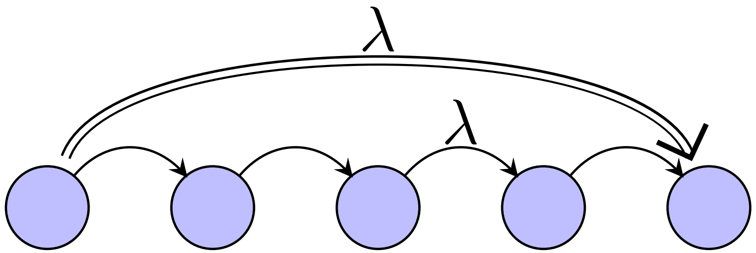


$$\stackrel{\lambda_1}{\Rightarrow}\stackrel{\lambda_2}{\Rightarrow}\stackrel{\lambda_3}{\Rightarrow}\ \dots$$

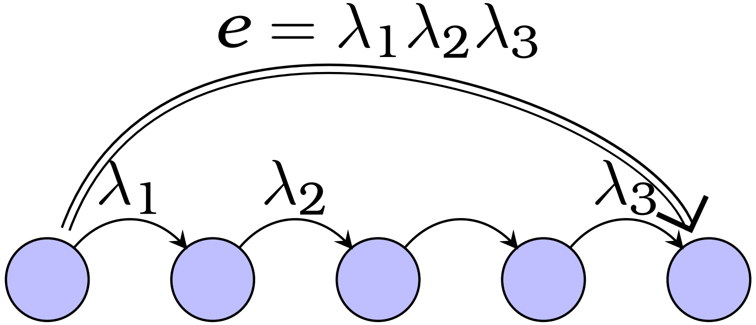
Reparatur der Definition



$$\Rightarrow \quad := \quad \rightarrow^*$$



$$\stackrel{\lambda}{\Rightarrow} \quad := \quad \Rightarrow \xrightarrow{\lambda} \Rightarrow$$



$$\stackrel{e}{\Rightarrow} \quad := \quad \stackrel{\lambda_1}{\Rightarrow}\stackrel{\lambda_2}{\Rightarrow}\stackrel{\lambda_3}{\Rightarrow} \ldots$$

schwache Äquivalenz ($P \approx P'$)

Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \approx P'$ definiert über schwache Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt schwache Simulation: für alle Knoten P, P', R und Experimente e mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, Rightarrow, "e"'] & P' \\ R & \end{tikzcd} \quad \text{existiert } R' \text{ mit} \quad \begin{tikzcd} & P' \arrow[d, Rightarrow, "e"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$

  - Definition: $\mathcal{S}$ schwache Bisimulation: $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ schwache Simulationen
  - Definition: $P \approx P'$: es gibt eine schwache Bisimulation $\mathcal{S}$ mit $P\mathcal{S}P'$

schwache Äquivalenz ($P \approx P'$)

Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \approx P'$ definiert über schwache Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt schwache Simulation: für alle Knoten P, P', R und Experimente e mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, Rightarrow, "e"'] & P' \\ R & \end{tikzcd} \quad \text{existiert } R' \text{ mit} \quad \begin{tikzcd} & P' \arrow[d, Rightarrow, "e"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$

  - Definition: $\mathcal{S}$ schwache Bisimulation: $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ schwache Simulationen
  - Definition: $P \approx P'$: es gibt eine schwache Bisimulation $\mathcal{S}$ mit $P\mathcal{S}P'$

schwache Äquivalenz ($P \approx P'$)
Definition

- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \approx P'$ definiert über schwache Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt schwache Simulation:
    für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd} \quad \text{existiert } R' \text{ mit} \quad \begin{tikzcd} & P' \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$

  - Definition: $\mathcal{S}$ schwache Bisimulation:
    $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ schwache Simulationen
  - Definition: $P \approx P'$:
    es gibt eine schwache Bisimulation $\mathcal{S}$ mit $P\mathcal{S}P'$

schwache Äquivalenz ($P \approx P'$)

Definition

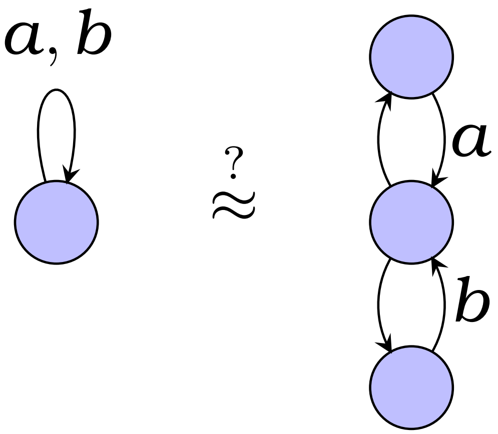
- Übersetzen: CCS-Ausdrücke P, P' in LTS
  - CCS-Ausdrücke als Knoten
  - Transitionen durch Regeln $\xrightarrow{\alpha}$.
- $P \approx P'$ definiert über schwache Bisimulationen:
  - Definition: Relation $\overset{\mathcal{S}}{-}$ heißt schwache Simulation: für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd} \quad \text{existiert } R' \text{ mit} \quad \begin{tikzcd} & P' \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] & R' \end{tikzcd}$$

  - Definition: $\mathcal{S}$ schwache Bisimulation: $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ schwache Simulationen
  - Definition: $P \approx P'$: es gibt eine schwache Bisimulation $\mathcal{S}$ mit $P\mathcal{S}P'$

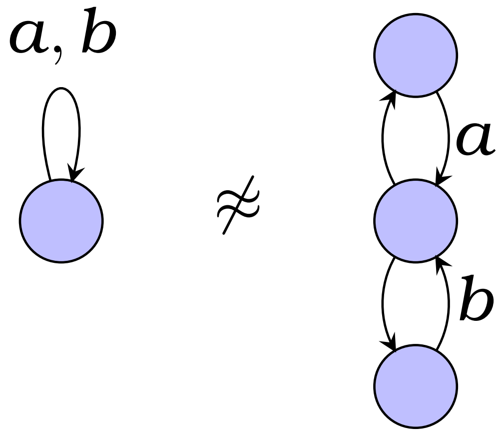
Beispiel: schwache Äquivalenz ($\sim$)

Lotterien

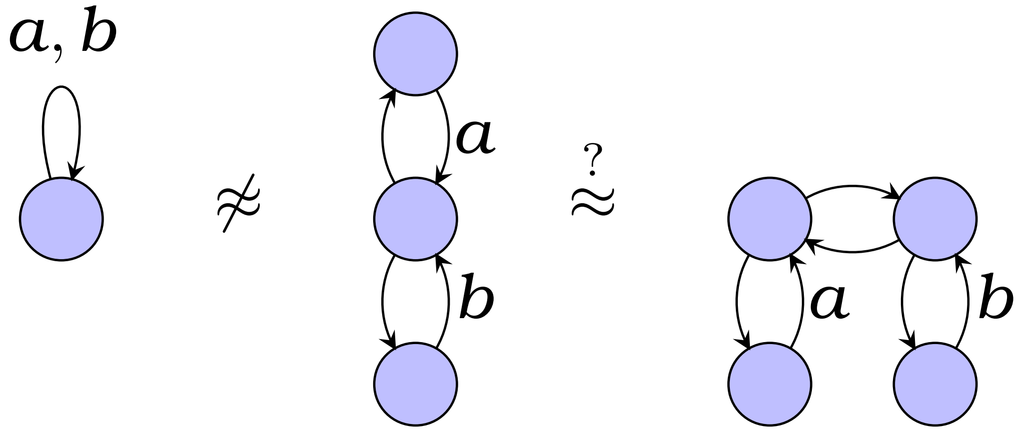


Beispiel: schwache Äquivalenz ($\sim$)

Lotterien

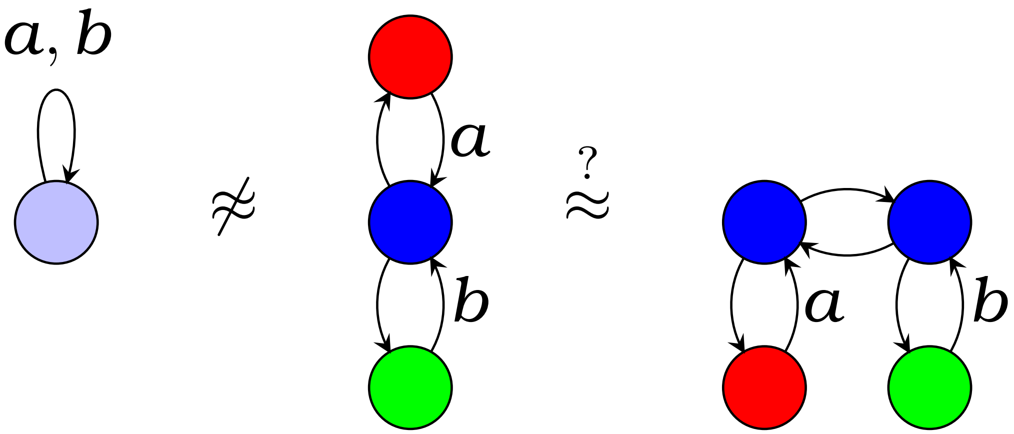


Beispiel: schwache Äquivalenz ($\sim$)
Lotterien

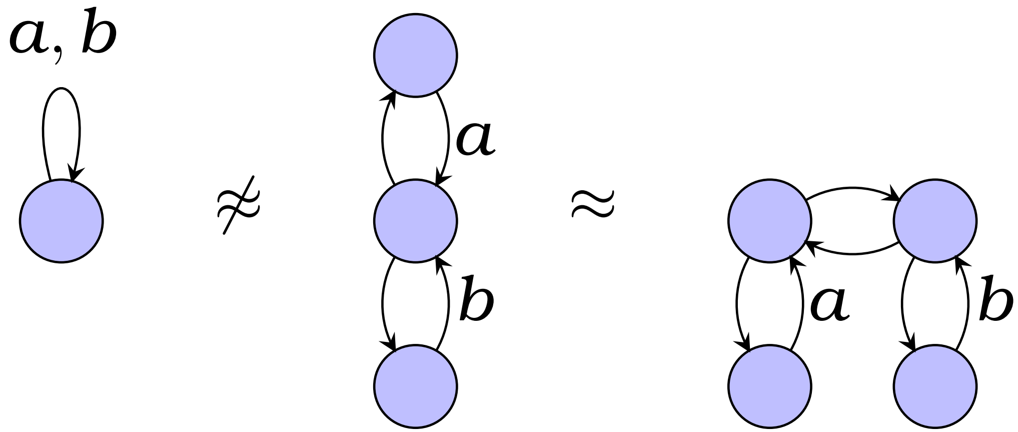


Beispiel: schwache Äquivalenz ($\sim$)

Lotterien



Beispiel: schwache Äquivalenz ($\sim$)
Lotterien



Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \Longrightarrow P \sim P'$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \Longrightarrow P \sim P'$
- $P \sim P' \Longrightarrow P \approx P'$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \Longrightarrow P \sim P'$
- $P \sim P' \Longrightarrow P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \Longleftrightarrow P \rightarrow P'$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \implies P \sim P'$
- $P \sim P' \implies P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \iff P \rightarrow P'$
- $P \approx \tau.P$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \Longrightarrow P \sim P'$
- $P \sim P' \Longrightarrow P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \Longleftrightarrow P \rightarrow P'$
- $P \approx \tau.P$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \implies P \sim P'$
- $P \sim P' \implies P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \iff P \rightarrow P'$
- $P \approx \tau.P$
- (new a)$a.P \sim 0 \sim$ (new a)$\overline{a}.P$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \implies P \sim P'$
- $P \sim P' \implies P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \iff P \to P'$
- $P \approx \tau.P$
- (new a)$a.P \sim \mathbf{0} \sim$ (new a)$\overline{a}.P$
- Um P' simuliert P zu testen, genügt es, Relation $\mathcal{S}$ zu finden, sodass

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \implies P \sim P'$
- $P \sim P' \implies P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \iff P \to P'$
- $P \approx \tau.P$
- (new a)$a.P \sim \mathbf{0} \sim$ (new a)$\overline{a}.P$
- Um P' simuliert P zu testen, genügt es, Relation $\mathcal{S}$ zu finden, sodass
  - für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd}$$

existiert R' mit

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\equiv \mathcal{S} \equiv"] & R' \end{tikzcd}$$

Eigenschaften der Verhaltensäquivalenzen

- $\sim$ ist die größte Bisimulation.
- $\approx$ ist die größte schwache Bisimulation.
- $P \equiv P' \implies P \sim P'$
- $P \sim P' \implies P \approx P'$
- $P(\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)P' \iff P \to P'$
- $P \approx \tau.P$
- (new a)$a.P \sim \mathbf{0} \sim$ (new a)$\overline{a}.P$
- Um P' simuliert P (schwach) zu testen, genügt es, Relation $\mathcal{S}$ zu finden, sodass
  - für alle Knoten P, P', R und Aktionen α mit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\alpha"'] & P' \\ R & \end{tikzcd}$$

existiert R' mit

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, dash, "\equiv \mathcal{S} \equiv", "(\sim \mathcal{S} \sim)"'] & R' \end{tikzcd}$$

Verhaltensäquivalenzen
Übersicht

$\equiv$	*structural congruence*		
	chemical machine	$\equiv, \longrightarrow$	$(\longrightarrow) = (\xrightarrow{\tau} \circ \equiv)$
$\sim$	*strong equivalence*	$\xrightarrow{\alpha}$	see diagram below
$\approx$	*weak equivalence*	$\Rightarrow, \stackrel{\lambda}{\Rightarrow}$	see diagram below

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[d, "\alpha"] \\ P' \arrow[r, dash, "\sim"] & R' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dash, "\approx"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\ P' \arrow[r, dash, "\approx"] & R' \end{tikzcd}$$

Referenzen

- R. Milner, “Communicating and Mobile Systems: the π-Calculus”, Cambridge University Press, 1999.
- H. Hermanns, “Verification” (Vorlesungsskript), Universität des Saarlandes, 2003.
- G. Berry und G. Boudol, “The Chemical Abstract Machine.” (Theoretical Computer Science), 96:217-248, 1992.