Höherstufige Kalküle

Mark Kaminski

Betreuer: Andreas Rossberg

6. Oktober 2004

Übersicht

- Höherstufiger π-Kalkül (HOπ)
  - Einführung: Eigenschaften von HOπ
  - Beispiel in HOπ
  - Übersetzung nach FOπ
  - Übersetzung am Beispiel
- λ-Kalkül
  - Einführung: Syntax und Auswertung
  - Continuation Passing Style (CPS)
  - Übersetzung nach FOπ
  - Übersetzung am Beispiel
  - Korrektheit der Übersetzung
  - Sortendisziplin der Übersetzung

Höherstufiger π-Kalkül (HOπ)

- Prozesse als Nachrichten

Höherstufiger π-Kalkül (HOπ)

- Prozesse als Nachrichten
- Mehrfache Verwendung/Ausführung einer Prozessnachricht

Höherstufiger π-Kalkül (HOπ)

- Prozesse als Nachrichten
- Mehrfache Verwendung/Ausführung einer Prozessnachricht
- Parametrisierung von Prozessen $\leadsto$ Abstraktionen als Nachrichten

Höherstufiger π-Kalkül (HOπ)

- Prozesse als Nachrichten
- Mehrfache Verwendung/Ausführung einer Prozessnachricht
- Parametrisierung von Prozessen $\rightsquigarrow$ Abstraktionen als Nachrichten

$\Rightarrow$ Expressivität, stärkere Strukturierung, Übersichtlichkeit

Polyadischer π-Kalkül (Syntax)

Variablen:

x	$\in$	$\mathcal{N}$	Namen

Agenten:

F	$::=$	$(\vec{x}).P$	Abstraktion
C	$::=$	new $\vec{x}$ $\langle\vec{y}\rangle.P$	Konkretisierung

Prozessausdrücke:

$$P \quad ::= \quad xF \mid \overline{x}C \mid \tau.P \mid \sum_{i\in I} P_i \mid P_1|P_2 \mid \text{new } \vec{x}\ P \mid\ !P$$

HOπ (Syntax)

Variablen:

x	$\in$	$\mathcal{N}$	Namen
f	$\in$	$\mathcal{F}$	Variablen über Abstraktionen
v	$\in$	$\mathcal{N} \cup \mathcal{F}$	Variablen über Werte

Werte:

$$V \quad ::= \quad x \mid F$$

Agenten:

F	$::=$	$(\vec{v}).P \mid f$	Abstraktion
C	$::=$	$\text{new } \vec{x}\ \langle \vec{V} \rangle.P$	Konkretisierung

Prozessausdrücke:

$$P \quad ::= \quad xF \mid \overline{x}C \mid \tau.P \mid \sum_{i \in I} P_i \mid P_1|P_2 \mid \text{new } \vec{x}\ P \mid !P$$

Beispiel

$$\underset{w \in FV(F) \cap FV(P')}{P = \textsf{new } w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')} \qquad \underset{f,w \notin FV(Q')}{Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')}$$

$$P \mid Q \ \longrightarrow \textsf{new } w\ (P' \mid F\langle u\rangle \mid F\langle v\rangle) \mid Q'$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ

Zweck:

- Übertragung bekannter Eigenschaften aus 1. Stufe
- Anwendung bewährter Beweistechniken
- HOπ als abstrahierende Notation

Übersetzung von HOπ nach FOπ (2)

Vorgehensweise:

- konzeptuelle Analogie zur Übersetzung von funktionalem Quellcode in Maschinensprache

Übersetzung von HOπ nach FOπ (2)

Vorgehensweise:

- konzeptuelle Analogie zur Übersetzung von funktionalem Quellcode in Maschinensprache
  - Kommunikation von Prozeduren
    $\leadsto$ Kommunikation von Zeigern auf Prozedurcode
    vs. Kommunikation von Abstraktionen
    $\leadsto$ Kommunikation von (Kanal-)Namen, über welche die Abstraktionen parametrisiert werden

Übersetzung von HOπ nach FOπ (2)

Vorgehensweise:

- konzeptuelle Analogie zur Übersetzung von funktionalem Quellcode in Maschinensprache
  - Kommunikation von Prozeduren
    $\rightsquigarrow$ Kommunikation von Zeigern auf Prozedurcode
    vs. Kommunikation von Abstraktionen
    $\rightsquigarrow$ Kommunikation von (Kanal-)Namen, über welche die Abstraktionen parametrisiert werden
  - Speicherung von Prozeduren/Abstraktionen in "mehrfach instanziierbarer" Form

Übersetzung von HOπ nach FOπ (2)

Vorgehensweise:

- konzeptuelle Analogie zur Übersetzung von funktionalem Quellcode in Maschinensprache
  - Kommunikation von Prozeduren
    $\leadsto$ Kommunikation von Zeigern auf Prozedurcode
    vs. Kommunikation von Abstraktionen
    $\leadsto$ Kommunikation von (Kanal-)Namen, über welche die Abstraktionen parametrisiert werden
  - Speicherung von Prozeduren/Abstraktionen in "mehrfach instanziierbarer" Form
  - Trennung von Speicherbereichen/Namen (im π-Kalkül besonders wichtig wegen Indeterminismus)

Übersetzung von HOπ nach FOπ (2)

Vorgehensweise:

- konzeptuelle Analogie zur Übersetzung von funktionalem Quellcode in Maschinensprache
  - Kommunikation von Prozeduren
    $\leadsto$ Kommunikation von Zeigern auf Prozedurcode
    vs. Kommunikation von Abstraktionen
    $\leadsto$ Kommunikation von (Kanal-)Namen, über welche die Abstraktionen parametrisiert werden
  - Speicherung von Prozeduren/Abstraktionen in "mehrfach instanziierbarer" Form
  - Trennung von Speicherbereichen/Namen (im π-Kalkül besonders wichtig wegen Indeterminismus)
- Unterschiede in der technischen Realisierung wegen stark unterschiedlicher Berechnungsmodelle

Übersetzung von HOπ nach FOπ (3)

Grundlegende Übersetzungsregeln:

- Kommunikation von Abstraktionen

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] \;=\; \textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \tag{1}$$

  – Allokation eines neuen privaten Kanalnamens y

  – Übermittlung des Kanalnamens statt der Abstraktion

  – Zugriff auf F über y; mehrfache Instanziierbarkeit durch Replikation

Übersetzung von HOπ nach FOπ (3)

Grundlegende Übersetzungsregeln:

- Kommunikation von Abstraktionen

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] \;=\; \textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \tag{1}$$

  - Allokation eines neuen privaten Kanalnamens y
  - Übermittlung des Kanalnamens statt der Abstraktion
  - Zugriff auf F über y; mehrfache Instanziierbarkeit durch Replikation

- Applikation

$$[\![f\langle x\rangle]\!] \;=\; \overline{f}\langle x\rangle \tag{2}$$

  - f ist nach der Übersetzung ein Kanalname, über den die Parametrisierung der eigentlichen Abstraktion erfolgt

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \quad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \quad (2)$$

Beispiel:

$$\underset{w \in FV(F) \cap FV(P')}{P = \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')} \qquad \underset{f,w \notin FV(Q')}{Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')}$$

$$[\![P]\!] = [\![\textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!]$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \mathsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \quad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \quad (2)$$

Beispiel:

$$\underset{w\in FV(F)\cap FV(P')}{P = \mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')} \qquad \underset{f,w\notin FV(Q')}{Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')}$$

$$\begin{aligned}[\![P]\!] &= [\![\mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!] \\ &= \mathsf{new}\ w\ [\![(\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!] \qquad [\![\mathsf{new}\ x\ P]\!]=\mathsf{new}\ x\ [\![P]\!]\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$\llbracket \overline{x}\langle F\rangle.P\rrbracket = \textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\llbracket P\rrbracket \mid !y\llbracket F\rrbracket)) \quad (1)$$

$$\llbracket f\langle x\rangle\rrbracket = \overline{f}\langle x\rangle \quad (2)$$

Beispiel:

$$P = \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P') \qquad Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$$

$w{\in}FV(F){\cap}FV(P')$ $\qquad$ $f{,}w{\notin}FV(Q')$

$$\begin{aligned}
\llbracket P\rrbracket &= \llbracket \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')\rrbracket \\
&= \textsf{new}\ w\ \llbracket(\overline{x}\langle F\rangle.P')\rrbracket && \llbracket \textsf{new}\ x\ P\rrbracket{=}\textsf{new}\ x\ \llbracket P\rrbracket \\
&= \textsf{new}\ w\ \big(\textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\llbracket P'\rrbracket \mid !y\llbracket F\rrbracket))\big) && (1)
\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \mathsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \qquad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \qquad (2)$$

Beispiel:

$$\underset{w \in FV(F) \cap FV(P')}{P = \mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')} \qquad \underset{f, w \notin FV(Q')}{Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')}$$

$$\begin{aligned}
[\![P]\!] &= [\![\mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!] \\
&= \mathsf{new}\ w\ [\![(\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!] && [\![\mathsf{new}\ x\ P]\!] = \mathsf{new}\ x\ [\![P]\!] \\
&= \mathsf{new}\ w\ (\mathsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P']\!] \mid !y[\![F]\!]))) && (1) \\
&= \mathsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P']\!] \mid !y[\![F]\!])) && Notation
\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \mathsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \qquad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \qquad (2)$$

Beispiel:

$P = \mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')$ $\qquad$ $Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$

$w \in FV(F) \cap FV(P')$ $\qquad$ $f, w \notin FV(Q')$

$$\begin{aligned}
[\![P]\!] &= [\![\mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!] \\
&= \mathsf{new}\ w\ [\![(\overline{x}\langle F\rangle.P')]\!] && [\![\mathsf{new}\ x\ P]\!] = \mathsf{new}\ x\ [\![P]\!] \\
&= \mathsf{new}\ w\ (\mathsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P']\!] \mid !y[\![F]\!]))) && (1) \\
&= \mathsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P']\!] \mid !y[\![F]\!])) && Notation \\
&= \mathsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F})) && \widehat{P}' := [\![P']\!],\ \widehat{F} := [\![F]\!]
\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid\ !y[\![F]\!])) \quad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \quad (2)$$

Beispiel:

$$P = \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P') \qquad Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$$

$w \in FV(F) \cap FV(P')$ $\qquad$ $f, w \notin FV(Q')$

$$[\![P]\!] = \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid\ !y\widehat{F}))$$

$$[\![Q]\!] = [\![x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!]$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \mathsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \qquad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \qquad (2)$$

Beispiel:

$$P = \mathsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P') \qquad Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$$

$w \in FV(F) \cap FV(P')$ $\qquad$ $f, w \notin FV(Q')$

$$[\![P]\!] = \mathsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$$

$$\begin{aligned}[\![Q]\!] &= [\![x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!] \\ &= x(f).[\![(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!] \qquad [\![x(v).P]\!] = x(v).[\![P]\!]\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \textsf{new } y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \qquad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \qquad (2)$$

Beispiel:

$$\underset{w \in FV(F) \cap FV(P')}{P = \textsf{new } w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')} \qquad \underset{f,w \notin FV(Q')}{Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')}$$

$$[\![P]\!] = \textsf{new } wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$$

$$\begin{aligned}
[\![Q]\!] &= [\![x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!] \\
&= x(f).[\![(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!] && [\![x(v).P]\!]=x(v).[\![P]\!] \\
&= x(f).([\![f\langle u\rangle]\!] \mid [\![f\langle v\rangle]\!] \mid [\![Q']\!]) && [\![P \mid Q]\!]=[\![P]\!] \mid [\![Q]\!]
\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (4)

$$[\![\overline{x}\langle F\rangle.P]\!] = \textsf{new}\ y\ (\overline{x}\langle y\rangle.([\![P]\!] \mid !y[\![F]\!])) \qquad (1)$$

$$[\![f\langle x\rangle]\!] = \overline{f}\langle x\rangle \qquad (2)$$

Beispiel:

$$\underset{w \in FV(F) \cap FV(P')}{P = \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')} \qquad \underset{f,w \notin FV(Q')}{Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')}$$

$$[\![P]\!] = \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$$

$$\begin{aligned}
[\![Q]\!] &= [\![x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!] \\
&= x(f).[\![(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')]\!] && {\scriptstyle [\![x(v).P]\!] = x(v).[\![P]\!]} \\
&= x(f).([\![f\langle u\rangle]\!] \mid [\![f\langle v\rangle]\!] \mid [\![Q']\!]) && {\scriptstyle [\![P \mid Q]\!] = [\![P]\!] \mid [\![Q]\!]} \\
&= x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}') && {\scriptstyle (2),\ \widehat{Q}' := [\![Q']\!]}
\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (5)

$P = \text{new } w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')$ $\qquad$ $Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$

$w{\in}FV(F){\cap}FV(P')$ $\qquad$ $f,w{\notin}FV(Q')$

$\widehat{P} = \text{new } wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$ $\qquad$ $\widehat{Q} = x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')$

Ziel: $\widehat{P}|\widehat{Q} \longrightarrow^{*} \sim \text{new } w\ (\widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}'$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (5)

$P = \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')$ $\quad Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$

$w{\in}FV(F){\cap}FV(P')$ $\quad f{,}w{\notin}FV(Q')$

$\widehat{P} = \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$ $\quad \widehat{Q} = x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')$

Ziel: $\widehat{P}|\widehat{Q} \longrightarrow^{*}\sim \textsf{new}\ w\ (\widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}'$

Reaktion:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}|\widehat{Q} &= \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F})) \mid x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}') \\
&\equiv \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}) \mid x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')) \qquad w{\notin}FV(\widehat{Q}') \\
&\longrightarrow \textsf{new}\ wy\ ((\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}) \mid (\overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}'))
\end{aligned}$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (5)

$P = \text{new } w \; (\overline{x}\langle F\rangle.P')$ $\qquad$ $Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$

$w \in FV(F) \cap FV(P')$ $\qquad$ $f, w \notin FV(Q')$

$\widehat{P} = \text{new } wy \; (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$ $\qquad$ $\widehat{Q} = x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')$

Ziel: $\widehat{P}|\widehat{Q} \longrightarrow^* \sim \text{new } w \; (\widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}'$

Reaktion:

$$
\begin{aligned}
\widehat{P}|\widehat{Q} &= \text{new } wy \; (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F})) \mid x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}') \\
&\equiv \text{new } wy \; (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}) \mid x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')) && w \notin FV(\widehat{Q}') \\
&\longrightarrow \text{new } wy \; ((\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}) \mid (\overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')) \\
&\equiv \text{new } wy \; (\widehat{P}' \mid !y\widehat{F} \mid \overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}' && w, f \notin FV(\widehat{Q}') \\
&\equiv \text{new } wy \; (!y\widehat{F} \mid \widehat{P}' \mid y\widehat{F} \mid y\widehat{F} \mid \overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}'
\end{aligned}
$$

Übersetzung von HOπ nach FOπ (5)

$P = \textsf{new}\ w\ (\overline{x}\langle F\rangle.P')$ $\quad$ $Q = x(f).(f\langle u\rangle \mid f\langle v\rangle \mid Q')$

$w \in FV(F) \cap FV(P')$ $\quad$ $f, w \notin FV(Q')$

$\widehat{P} = \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}))$ $\quad$ $\widehat{Q} = x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')$

Ziel: $\widehat{P}|\widehat{Q} \longrightarrow^{*}\sim \textsf{new}\ w\ (\widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}'$

Reaktion:

$$
\begin{aligned}
\widehat{P}|\widehat{Q} \;=\;& \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F})) \mid x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}') \\
\equiv\;& \textsf{new}\ wy\ (\overline{x}\langle y\rangle.(\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}) \mid x(f).(\overline{f}\langle u\rangle \mid \overline{f}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')) && w \notin FV(\widehat{Q}') \\
\longrightarrow\;& \textsf{new}\ wy\ ((\widehat{P}' \mid !y\widehat{F}) \mid (\overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle \mid \widehat{Q}')) \\
\equiv\;& \textsf{new}\ wy\ (\widehat{P}' \mid !y\widehat{F} \mid \overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}' && w,f \notin FV(\widehat{Q}') \\
\equiv\;& \textsf{new}\ wy\ (!y\widehat{F} \mid \widehat{P}' \mid y\widehat{F} \mid y\widehat{F} \mid \overline{y}\langle u\rangle \mid \overline{y}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}' \\
\longrightarrow\;& \textsf{new}\ wy\ (!y\widehat{F} \mid \widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}' \\
\equiv\;& \textsf{new}\ w\ (\textsf{new}\ y\ (!y\widehat{F}) \mid \widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}' \\
\sim\;& \textsf{new}\ w\ (\widehat{P}' \mid \widehat{F}\langle u\rangle \mid \widehat{F}\langle v\rangle) \mid \widehat{Q}' && \textsf{new}\ y\ (!y\widehat{F}) \sim 0
\end{aligned}
$$

Ungetypter λ-Kalkül: Übersicht

Syntax: $$M, N ::= x \mid \lambda x.M \mid MN$$

- Modellierung von Berechnung durch β-Reduktion:

$$(\lambda x.M)N \xrightarrow{\beta} \{^N/_x\}M$$

- höherstufig (ähnlich zu HOπ)
- unterschiedliche Berechnungsstrategien
- Universelles Berechnungsmodell (Turing-Vollständigkeit)
  $\Rightarrow$ Simulation des λ-Kalküls im π-Kalkül beweist die Berechnungskraft von FOπ.

Berechnung im λ-Kalkül: eine einfache Strategie

Auswertungsregeln:

$$\beta : \frac{}{(\lambda x.M)N \longrightarrow \{^N/_x\}M} \qquad \mu : \frac{M \longrightarrow M'}{M\ N \longrightarrow M'\ N}$$

Beispiel:

$(\lambda x.(\lambda y.y)xx)(\lambda x.\lambda y.zy) \rightarrow (\lambda y.y)(\lambda x.\lambda y.zy)(\lambda x.\lambda y.zy)$
$\rightarrow (\lambda x.\lambda y.zy)(\lambda x.\lambda y.zy) \rightarrow \lambda y.zy$

- vereinfachte Variante der normalen Auswertungsordnung
- keine Auswertung im Rumpf einer Abstraktion
- entspricht einer naiven Implementierung bedarfsgesteuerter Berechnung

Continuation Passing Style (CPS)

- Fortsetzung (continuation): Funktion, die den “Rest” einer Berechnung beschreibt.
- Funktionen im CPS bekommen ihre Fortsetzung als Argument und terminieren, indem sie das Ergebnis der Funktionsanwendung an ihre Fortsetzung übergeben.

Continuation Passing Style (CPS)

- Fortsetzung (continuation): Funktion, die den “Rest” einer Berechnung beschreibt.
- Funktionen im CPS bekommen ihre Fortsetzung als Argument und terminieren, indem sie das Ergebnis der Funktionsanwendung an ihre Fortsetzung übergeben.

$\Rightarrow$ explizite Modellierung des Kontrollflusses

$\Rightarrow$ gut geeignet für die Übersetzung von λ-Termen in Formalismen mit einer anderen Termstruktur, etwa in den π-Kalkül

Übersetzung in CPS

Übersetzung von λ-Termen in CPS gemäß unserer Auswertungsstrategie

$$[\![x]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda k.xk \stackrel{\eta}{=} x$$

Die Fortsetzung k wird an x weitergeleitet.

Übersetzung in CPS

Übersetzung von λ-Termen in CPS gemäß unserer Auswertungsstrategie

$$[\![x]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda k.xk \stackrel{\eta}{=} x$$

Die Fortsetzung k wird an x weitergeleitet.

$$[\![\lambda x.M]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda k.k(\lambda x.[\![M]\!])$$

- Keine Auswertung im Rumpf von Abstraktionen,
- Weitergabe der Abstraktion an die Fortsetzung.

Übersetzung in CPS

Übersetzung von λ-Termen in CPS gemäß unserer Auswertungsstrategie

$$[\![x]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda k.xk \stackrel{\eta}{=} x$$

Die Fortsetzung k wird an x weitergeleitet.

$$[\![\lambda x.M]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda k.k(\lambda x.[\![M]\!])$$

- Keine Auswertung im Rumpf von Abstraktionen,
- Weitergabe der Abstraktion an die Fortsetzung.

$$[\![MN]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda k.[\![M]\!](\lambda v.v[\![N]\!]k)$$

1. Auswertung von M,
2. Übergabe der resultierenden Abstraktion an die Fortsetzung,
3. Applikation des Arguments durch die Fortsetzung.

Übersetzung in CPS: Beispiel

$$(\lambda x.x)y \rightarrow y$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)y]\!]k \rightarrow^* [\![y]\!]k$$

Übersetzung in CPS: Beispiel

$$(\lambda x.x)y \to y$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)y]\!]k \to^* [\![y]\!]k$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)y]\!]k &= [\![(\lambda x.x)]\!](\lambda v.v[\![y]\!]k) \\
&= (\lambda w.w(\lambda x.[\![x]\!]))(\lambda v.v[\![y]\!]k) \\
&= (\lambda w.w(\lambda x.x))(\lambda v.vyk)
\end{aligned}$$

Übersetzung in CPS: Beispiel

$$(\lambda x.x)y \to y$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)y]\!]k \to^* [\![y]\!]k$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned} [\![(\lambda x.x)y]\!]k &= [\![(\lambda x.x)]\!](\lambda v.v[\![y]\!]k) \\ &= (\lambda w.w(\lambda x.[\![x]\!]))(\lambda v.v[\![y]\!]k) \\ &= (\lambda w.w(\lambda x.x))(\lambda v.vyk) \end{aligned}$$

Reaktion:

$$\begin{aligned} (\lambda w.w(\lambda x.x))(\lambda v.vyk) &\to (\lambda v.vyk)(\lambda x.x) && \text{Abstraktion an die Fortsetung} \\ &\to (\lambda x.x)yk && \text{Applikation durch die Fortsetzung} \\ &\to yk && = [\![y]\!]k \end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Vorüberlegung

CPS		**FOπ**
$\lambda x.M$	$\leadsto$	$(x).M$

Übersetzung in den π-Kalkül: Vorüberlegung

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{CPS} & & \textbf{FO}\pi \\
\lambda x.M & \leadsto & (x).M \\
Mx & \leadsto & M\langle x\rangle
\end{array}
$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Vorüberlegung

CPS		**FOπ**
$\lambda x.M$	$\rightsquigarrow$	$(x).M$
Mx	$\rightsquigarrow$	$M\langle x\rangle$
$M(\lambda x.N)$	$\rightsquigarrow$	new $g\,(M\langle g\rangle \mid !g(x).N)$

Übersetzung in den π-Kalkül

λ-Term $\rightarrow$ CPS

$$
\begin{array}{rcll}
[\![x]\!] & = & \lambda k.xk & \\
[\![\lambda x.M]\!] & = & \lambda k.k(\lambda x.[\![M]\!]) & \\
 & = & \lambda k.k(\lambda xv.[\![M]\!]v) & \eta \\
[\![MN]\!] & = & \lambda k.[\![M]\!](\lambda v.v[\![N]\!]k) &
\end{array}
$$

Übersetzung in den π-Kalkül

λ-Term $\to$ CPS

$$
\begin{array}{rcll}
[\![x]\!] & = & \lambda k.xk & \\
[\![\lambda x.M]\!] & = & \lambda k.k(\lambda x.[\![M]\!]) & \\
 & = & \lambda k.k(\lambda xv.[\![M]\!]v) & \eta \\
[\![MN]\!] & = & \lambda k.[\![M]\!](\lambda v.v[\![N]\!]k) &
\end{array}
$$

CPS $\to$ FOπ

$$
\begin{array}{rcl}
[\lambda k.xk] & = & (k).\overline{x}\langle k\rangle \\
[\lambda k.k(\lambda xv.[\![M]\!]v)] & = & (k).k(xv).[[\![M]\!]]\langle v\rangle \\
[\lambda k.[\![M]\!](\lambda v.v[\![N]\!]k)] & & \\
 & = & (k).\mathsf{new}\, v\,([[\![M]\!]]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, x\,(\overline{v}\langle xk\rangle \mid !x[[\![N]\!]]))
\end{array}
$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Zusammenfassung

λ-Term $\to$ FOπ

$$
\begin{array}{rcl}
[\![x]\!] & = & (k).\overline{x}\langle k\rangle \qquad (= \quad \overline{x}) \\
[\![\lambda x.M]\!] & = & (k).k(xv).[\![M]\!]\langle v\rangle \\
[\![MN]\!] & = & (k).\mathsf{new}\, v\,([\![M]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, x\,(\overline{v}\langle xk\rangle \mid !x[\![N]\!]))
\end{array}
$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel

$$(\lambda x.x)N \to N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \to^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel

$$(\lambda x.x)N \rightarrow N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \rightarrow^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned}[\![\lambda x.x]\!] &= (v).v(xw).[\![x]\!]\langle w\rangle \\ &= (v).v(xw).\overline{x}\langle w\rangle\end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel

$$(\lambda x.x)N \to N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \to^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned}
[\![\lambda x.x]\!] &= (v).v(xw).[\![x]\!]\langle w\rangle \\
&= (v).v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \\
[\![\lambda x.x]\!]\langle v\rangle &= v(xw).\overline{x}\langle w\rangle
\end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel

$$(\lambda x.x)N \longrightarrow N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \longrightarrow^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned}
[\![\lambda x.x]\!] &= (v).v(xw).[\![x]\!]\langle w\rangle \\
&= (v).v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \\
[\![\lambda x.x]\!]\langle v\rangle &= v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \\
[\![(\lambda x.x)N]\!] &= (u).\mathsf{new}\, v\, ([\![\lambda x.x]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]))
\end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel

$$(\lambda x.x)N \to N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \to^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned}
[\![\lambda x.x]\!] &= (v).v(xw).[\![x]\!]\langle w\rangle \\
&= (v).v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \\
[\![\lambda x.x]\!]\langle v\rangle &= v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \\
[\![(\lambda x.x)N]\!] &= (u).\mathsf{new}\, v\, ([\![\lambda x.x]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!])) \\
&= (u).\mathsf{new}\, v\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]))
\end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel (2)

$$(\lambda x.x)N \to N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \to^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Reaktion:

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel (2)

$$(\lambda x.x)N \rightarrow N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \rightarrow^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Reaktion:

$$\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle &= \mathsf{new}\, v\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!])) \\
&\equiv \mathsf{new}\, vx\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
&\rightarrow \mathsf{new}\, vx\, (\overline{x}\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])
\end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel (2)

$$(\lambda x.x)N \to N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \to^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Reaktion:

$$\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle &= \mathsf{new}\, v\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]))\\
&\equiv \mathsf{new}\, vx\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!])\\
&\to \mathsf{new}\, vx\, (\overline{x}\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])\\
&\equiv \mathsf{new}\, vx\, (\overline{x}\langle u\rangle \mid x[\![N]\!] \mid !x[\![N]\!])
\end{aligned}$$

Übersetzung in den π-Kalkül: Beispiel (2)

$$(\lambda x.x)N \to N$$

Ziel:

$$[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle \to^{*}\sim [\![N]\!]\langle u\rangle$$

Reaktion:

$$\begin{array}{rcl}
[\![(\lambda x.x)N]\!]\langle u\rangle & = & \mathsf{new}\, v\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!])) \\
& \equiv & \mathsf{new}\, vx\, (v(xw).\overline{x}\langle w\rangle \mid \overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \to & \mathsf{new}\, vx\, (\overline{x}\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \equiv & \mathsf{new}\, vx\, (\overline{x}\langle u\rangle \mid x[\![N]\!] \mid !x[\![N]\!]) \\
& \to & \mathsf{new}\, vx\, ([\![N]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \equiv & [\![N]\!]\langle u\rangle \mid \mathsf{new}\, vx\, (!x[\![N]\!]) \\
& \sim & [\![N]\!]\langle u\rangle
\end{array}$$

Korrektheit der Übersetzung

Was sind die (komputationalen) Eigenschaften eines λ-Terms?

- Auftreten von β-Redexen
- Kombinierbarkeit mit anderen Termen zu β-Redexen

Korrektheit der Übersetzung

Was sind die (komputationalen) Eigenschaften eines λ-Terms?

- Auftreten von β-Redexen
- Kombinierbarkeit mit anderen Termen zu β-Redexen

$\Rightarrow$ Die Frage nach der Korrektheit der Übersetzung reduziert sich auf die Frage nach der Bewahrung der β-Reduzierbarkeit, d.h. der Gültigkeit der β-Regel

Korrektheit der Übersetzung

Was sind die (komputationalen) Eigenschaften eines λ-Terms?

- Auftreten von β-Redexen
- Kombinierbarkeit mit anderen Termen zu β-Redexen

$\Rightarrow$ Die Frage nach der Korrektheit der Übersetzung reduziert sich auf die Frage nach der Bewahrung der β-Reduzierbarkeit, d.h. der Gültigkeit der β-Regel

Die β-Reduzierbarkeit ist eine zu beobachtende Eigenschaft
$\Rightarrow \approx$ als Äquivalenzrelation genügt

Zu zeigen:

$$[\![(\lambda x.M)N]\!] \approx [\![\{^N/_x\}M]\!]$$

Korrektheit der Übersetzung (2)

$$[\![(\lambda x.M)N]\!]\langle u\rangle \;=\; \mathsf{new}\, v\,(v(xw).[\![M]\!]\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\,(\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]))$$

Korrektheit der Übersetzung (2)

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.M)N]\!]\langle u\rangle &= \mathsf{new}\, v\,(v(xw).[\![M]\!]\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\,(\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!])) \\
&\sim \tau.\mathsf{new}\, x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])
\end{aligned}
$$

Korrektheit der Übersetzung (2)

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.M)N]\!]\langle u\rangle &= \mathsf{new}\, v\, (v(xw).[\![M]\!]\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!])) \\
&\sim \tau.\mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
&\approx \mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])
\end{aligned}
$$

Korrektheit der Übersetzung (2)

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.M)N]\!]\langle u\rangle &= \mathsf{new}\, v\,(v(xw).[\![M]\!]\langle w\rangle \mid \mathsf{new}\, x\,(\overline{v}\langle xu\rangle \mid !x[\![N]\!]))\\
&\sim \tau.\mathsf{new}\, x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])\\
&\approx \mathsf{new}\, x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Z.z.:

$$
\mathsf{new}\, x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \approx [\![\{^N/_x\}M]\!]\langle u\rangle
$$

Korrektheit der Übersetzung (3)

Behauptung:

$$\mathsf{new}\,x\,(\llbracket M\rrbracket\langle u\rangle \mid !x\llbracket N\rrbracket) \approx \llbracket\{^N/_x\}M\rrbracket\langle u\rangle$$

Beweis: Induktion über die Struktur von M

1. $M = x$

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{new}\,x\,(\llbracket M\rrbracket\langle u\rangle \mid !x\llbracket N\rrbracket) & = & \mathsf{new}\,x\,(\overline{x}\langle u\rangle \mid !x\llbracket N\rrbracket) & \text{def } \llbracket_\rrbracket \\
& \sim & \tau.\llbracket N\rrbracket\langle u\rangle \mid \mathsf{new}\,x\,!x\llbracket N\rrbracket & x \text{ frisch} \\
& \sim & \tau.\llbracket N\rrbracket\langle u\rangle & \mathsf{new}\,x\,(!xP){\sim}0 \\
& \approx & \llbracket N\rrbracket\langle u\rangle & \tau.P{\approx}P \\
& = & \llbracket\{^N/_x\}M\rrbracket\langle u\rangle &
\end{array}$$

Korrektheit der Übersetzung (4)

Behauptung:

$$\mathsf{new}\,x\,(\llbracket M\rrbracket\langle u\rangle \mid !x\llbracket N\rrbracket) \approx \llbracket\{^N/_x\}M\rrbracket\langle u\rangle$$

Beweis: Induktion über die Struktur von M

2. $M = y \neq x$

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{new}\,x\,(\llbracket M\rrbracket\langle u\rangle \mid !x\llbracket N\rrbracket) & = & \mathsf{new}\,x\,(\overline{y}\langle u\rangle \mid !x\llbracket N\rrbracket) & \text{def}\ \llbracket\_\rrbracket \\ & \sim & \overline{y}\langle u\rangle & \\ & = & \llbracket y\rrbracket\langle u\rangle & \text{def}\ \llbracket\_\rrbracket \\ & = & \llbracket\{^N/_x\}M\rrbracket\langle u\rangle & \end{array}$$

Korrektheit der Übersetzung (5)

Behauptung:

$$\mathsf{new}\,x\,(\llbracket M \rrbracket\langle u\rangle \mid !x\llbracket N \rrbracket) \approx \llbracket \{^N/_x\}M \rrbracket\langle u\rangle$$

Beweis: Induktion über die Struktur von M

3. $M = \lambda y.M'$

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{new}\,x\,(\llbracket M \rrbracket\langle u\rangle \mid !x\llbracket N \rrbracket) & = & \mathsf{new}\,x\,(u(yv).\llbracket M' \rrbracket\langle v\rangle \mid !x\llbracket N \rrbracket) & \text{def } \llbracket_\rrbracket \\
& \sim & u(yv).\mathsf{new}\,x\,(\llbracket M' \rrbracket\langle v\rangle \mid !x\llbracket N \rrbracket) & \\
& \approx & u(yv).\llbracket \{^N/_x\}M' \rrbracket\langle v\rangle & \text{IA} \\
& = & \llbracket \lambda y.\{^N/_x\}M' \rrbracket\langle u\rangle & \text{def } \llbracket_\rrbracket \\
& = & \llbracket \{^N/_x\}M \rrbracket\langle u\rangle &
\end{array}$$

Korrektheit der Übersetzung (6)

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid P_2 \mid !xF) \;\sim\; \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\, (P_2 \mid !xF) \tag{1}$$

$$\mathsf{new}\, x\, (!P \mid !xF) \;\sim\; !\, \mathsf{new}\, x\, (P \mid !xF) \tag{2}$$

4. $M = M_1 M_2$

   Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned} & \mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ = \quad & \mathsf{new}\, x\, (\mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!])) \mid !x[\![N]\!]) \end{aligned}$$

Korrektheit der Übersetzung (6)

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid P_2 \mid !xF) \;\sim\; \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\, (P_2 \mid !xF) \qquad (1)$$

$$\mathsf{new}\, x\, (!P \mid !xF) \;\sim\; !\, \mathsf{new}\, x\, (P \mid !xF) \qquad (2)$$

4. $M = M_1 M_2$

   Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned}
& \mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
= \;& \mathsf{new}\, x\, (\mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!])) \mid !x[\![N]\!]) \\
\approx \;& \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \qquad \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y(w).\mathsf{new}\, x\, ([\![M_2]\!]\langle w\rangle \mid !x[\![N]\!]))) \qquad (1), (2)
\end{aligned}$$

Korrektheit der Übersetzung (6)

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\mathsf{new}\, x\,(P_1 \mid P_2 \mid !xF) \;\sim\; \mathsf{new}\, x\,(P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\,(P_2 \mid !xF) \qquad (1)$$

$$\mathsf{new}\, x\,(!P \mid !xF) \;\sim\; !\,\mathsf{new}\, x\,(P \mid !xF) \qquad (2)$$

4. $M = M_1 M_2$

Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{new}\, x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
= \;& \mathsf{new}\, x\,(\mathsf{new}\, v\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!])) \mid !x[\![N]\!]) \\
\approx \;& \mathsf{new}\, v\,(\mathsf{new}\, x\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \qquad \mid \mathsf{new}\, y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y(w).\mathsf{new}\, x\,([\![M_2]\!]\langle w\rangle \mid !x[\![N]\!]))) && (1), (2) \\
\approx \;& \mathsf{new}\, v\,([\![\{^N/_x\}M_1]\!]\langle v\rangle \\
& \qquad \mid \mathsf{new}\, y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![\{^N/_x\}M_2]\!])) && \text{IA} \\
= \;& [\![\{^N/_x\}M_1 \; \{^N/_x\}M_2)]\!]\langle u\rangle && \text{def } [\![_]\!] \\
= \;& [\![\{^N/_x\}M]\!]\langle u\rangle
\end{aligned}$$

Sortendisziplin der Übersetzung

λ-Term $\rightarrow$ FOπ

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!] &= (k).\overline{x}\langle k\rangle \qquad (= \quad \overline{x}) \\
[\![\lambda x.M]\!] &= (k).k(xv).[\![M]\!]\langle v\rangle \\
[\![MN]\!] &= (k).\mathsf{new}\, v\, ([\![M]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (\overline{v}\langle xk\rangle \mid !x[\![N]\!]))
\end{aligned}
$$

Sortendisziplin der Übersetzung

λ-Term $\longrightarrow$ FOπ

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!] &= (k).\overline{x}\langle k\rangle \qquad (= \quad \overline{x}) \\
[\![\lambda x.M]\!] &= (k).k(xv).[\![M]\!]\langle v\rangle \\
[\![MN]\!] &= (k).\mathsf{new}\,v\,([\![M]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\,x\,(\overline{v}\langle xk\rangle \mid !x[\![N]\!]))
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Übersetzung des ungetypten λ-Kalküls mit $k, v : \mathrm{FUN}$ und $x : \mathrm{CHAN}(\mathrm{FUN})$ respektiert die Sortierung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CHAN}\ s &\mapsto s \\
\mathrm{FUN} &\mapsto \mathrm{CHAN}(\mathrm{FUN}),\ \mathrm{FUN}
\end{aligned}
$$

Sortendisziplin der Übersetzung

λ-Term $\rightarrow$ FOπ

$$\begin{aligned} [\![x]\!] &= (k).\overline{x}\langle k\rangle \qquad (= \quad \overline{x}) \\ [\![\lambda x.M]\!] &= (k).k(xv).[\![M]\!]\langle v\rangle \\ [\![MN]\!] &= (k).\mathsf{new}\, v\,([\![M]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, x\,(\overline{v}\langle xk\rangle \mid !x[\![N]\!])) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Übersetzung des ungetypten λ-Kalküls mit $k, v : \textsc{fun}$ und $x : \textsc{chan}(\textsc{fun})$ respektiert die Sortierung

$$\begin{aligned} \textsc{chan}\ s &\mapsto s \\ \textsc{fun} &\mapsto \textsc{chan}(\textsc{fun}), \textsc{fun} \end{aligned}$$

Die Sortierung

- macht keine Aussage über die (i.A. fehlende) Typdisziplin der λ-Terme
- beschreibt das CPS-Modell des Kontrollflusses

Zusammenfassung

Der π-Kalkül

- universelles Berechnungsmodell
- gut geeignet für formale Analyse paralleler Prozesse und ihres Interaktionsverhaltens

Zusammenfassung

Der π-Kalkül

- universelles Berechnungsmodell
- gut geeignet für formale Analyse paralleler Prozesse und ihres Interaktionsverhaltens

Aber

- nichtprozedural, nichtmodular $\leadsto$ umständliche Konstrukte
- Kommunikation von Namen nicht immer intuitiv

Zusammenfassung

Der π-Kalkül

- universelles Berechnungsmodell
- gut geeignet für formale Analyse paralleler Prozesse und ihres Interaktionsverhaltens

Aber

- nichtprozedural, nichtmodular $\rightsquigarrow$ umständliche Konstrukte
- Kommunikation von Namen nicht immer intuitiv

$\Rightarrow$ Entwicklung expressiver modularer und höherstufiger Prozessbeschreibungssprachen auf der Basis von FOπ

$\Rightarrow$ Verbindung der Expressivität höherstufiger Kalküle mit der formalen Zugänglichkeit des π-Kalküls

Literatur

- Robin Milner, Communicating and Mobile Systems: the π-Calculus, Cambridge University Press, ISBN 0521658691, 1999
- Davide Sangiorgi and David Walker, The π-calculus: A Theory of Mobile Processes, Cambridge University Press, 1st edition, ISBN 0521781779, December 15, 2001

Korrektheit der Übersetzung: $M = M_1 M_2$

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid P_2 \mid !xF) &\sim \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\, (P_2 \mid !xF) && (1) \\ \mathsf{new}\, x\, (!P \mid !xF) &\sim !\,\mathsf{new}\, x\, (P \mid !xF) && (2) \end{aligned}$$

4. $M = M_1 M_2$

Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned} & \mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ = \;& \mathsf{new}\, x\, (\mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!])) \mid !x[\![N]\!]) \\ \equiv \;& \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]) \mid !x[\![N]\!])) && v \text{ frisch} \\ \sim \;& \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ & \qquad \mid \mathsf{new}\, x\, (\mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]) \mid !x[\![N]\!])) && (1) \\ \equiv \;& \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ & \qquad \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (!y[\![M_2]\!] \mid !x[\![N]\!]))) && y \text{ frisch} \end{aligned}$$

Korrektheit der Übersetzung: $M = M_1 M_2$

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid P_2 \mid !xF) &\sim \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\, (P_2 \mid !xF) && (1) \\ \mathsf{new}\, x\, (!P \mid !xF) &\sim\ !\, \mathsf{new}\, x\, (P \mid !xF) && (2) \end{aligned}$$

4. $M = M_1 M_2$

Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned} &\mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ \sim\ &\mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ &\qquad \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (!y[\![M_2]\!] \mid !x[\![N]\!]))) \end{aligned}$$

Korrektheit der Übersetzung: $M = M_1 M_2$

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid P_2 \mid !xF) \;\sim\; \mathsf{new}\, x\, (P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\, (P_2 \mid !xF) \tag{1}$$

$$\mathsf{new}\, x\, (!P \mid !xF) \;\sim\; !\, \mathsf{new}\, x\, (P \mid !xF) \tag{2}$$

4. $M = M_1 M_2$

   Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{new}\, x\, ([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
\sim\;\; & \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \qquad\qquad \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid \mathsf{new}\, x\, (!y[\![M_2]\!] \mid !x[\![N]\!]))) \\
\sim\;\; & \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \qquad\qquad \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !\, \mathsf{new}\, x\, (y[\![M_2]\!] \mid !x[\![N]\!]))) \qquad (2) \\
\sim\;\; & \mathsf{new}\, v\, (\mathsf{new}\, x\, ([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\
& \qquad\qquad \mid \mathsf{new}\, y\, (\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y(w).\mathsf{new}\, x\, ([\![M_2]\!]\langle w\rangle \mid !x[\![N]\!])))
\end{aligned}$$

Korrektheit der Übersetzung: $M = M_1 M_2$

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{new}\, x\,(P_1 \mid P_2 \mid !xF) &\sim \mathsf{new}\, x\,(P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\, x\,(P_2 \mid !xF) && (1)\\
\mathsf{new}\, x\,(!P \mid !xF) &\sim !\,\mathsf{new}\, x\,(P \mid !xF) && (2)
\end{aligned}$$

4. $M = M_1 M_2$

   Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\, v\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\, y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{new}\, x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!])\\
\approx\;\; &\mathsf{new}\, v\,(\mathsf{new}\, x\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!])\\
&\qquad\qquad \mid \mathsf{new}\, y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y(w).\mathsf{new}\, x\,([\![M_2]\!]\langle w\rangle \mid !x[\![N]\!])))
\end{aligned}$$

Korrektheit der Übersetzung: $M = M_1 M_2$

Seien P, P_1, P_2, F negativ auf x. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{new}\,x\,(P_1 \mid P_2 \mid !xF) &\sim \mathsf{new}\,x\,(P_1 \mid !xF) \mid \mathsf{new}\,x\,(P_2 \mid !xF) && (1) \\ \mathsf{new}\,x\,(!P \mid !xF) &\sim \,!\,\mathsf{new}\,x\,(P \mid !xF) && (2) \end{aligned}$$

4. $M = M_1 M_2$

   Es gilt: $[\![M]\!]\langle u\rangle = \mathsf{new}\,v\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid \mathsf{new}\,y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![M_2]\!]))$

$$\begin{aligned} & \mathsf{new}\,x\,([\![M]\!]\langle u\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ \approx\; & \mathsf{new}\,v\,(\mathsf{new}\,x\,([\![M_1]\!]\langle v\rangle \mid !x[\![N]\!]) \\ & \qquad \mid \mathsf{new}\,y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y(w).\mathsf{new}\,x\,([\![M_2]\!]\langle w\rangle \mid !x[\![N]\!]))) \\ \approx\; & \mathsf{new}\,v\,([\![\{^N/_x\}M_1]\!]\langle v\rangle \\ & \qquad \mid \mathsf{new}\,y\,(\overline{v}\langle yu\rangle \mid !y[\![\{^N/_x\}M_2]\!])) && \text{IA} \\ =\; & [\![\{^N/_x\}M_1\ \{^N/_x\}M_2)]\!]\langle u\rangle && \text{def}\,[\![\_]\!] \\ =\; & [\![\{^N/_x\}M]\!]\langle u\rangle \end{aligned}$$