Reguläre Baumsprachen

Seminar Formal Grammars

Esfandiar Mohammadi

Programmiersysteme
Universität des Saarlandes
Betreuer: Professor Gert Smolka

22. März 2007

Übersicht

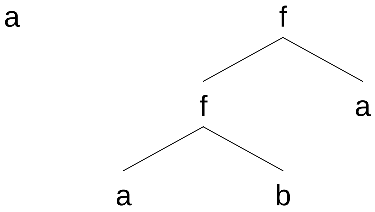
- Reguläre Baumgrammatiken
- Endliche Baumautomaten(EBA)
  - Regulären Baumgrammatiken und EBA
  - Abschlusseigentschaften von regulären Baumsprachen
- Monadische Logik zweiter Ordnung
  - Äquivalenz zu regulären Baumsprachen

- Reguläre Sprachen: Abgeschlossenheit unter Mengentheoretischen Operationen und endliche Repräsentation
- J.R. Büchi (1960) und C.C. Elgot (1961) charakterisierten reguläre Sprachen über Zeichenketten mit der Logik MSO, zeigten insbesondere die Entscheidbarkeit von MSO.
- J.W. Thatcher und J.B. Wright (1968) und J.E. Doner (1970) verallgemeinerten diese logische Charakterisierung zu Baum- bzw. Termsprachen.

- Betrachten wir folgende (rekursive) SML-Typdeklarationen:

$$\textit{datatype}\ \eta = a \mid b \mid f(\eta, \eta)$$

- Zwei Instanzen des Typs η



- Reguläre Baumgrammatik $G = (\Sigma, N, \xi, P)$
  - Startsymbol $\xi \in N$
  - Signatur $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \{0,..,l\}}$ mit Σ_i endlich, für alle i
  - Produktionen P von der Form

$$\eta \;\Rightarrow_G\; a \mid f(\nu_1, .., \nu_m) \mid \mu$$

mit $\eta, \mu, \nu_1, .., \nu_m \in N$, $a \in \Sigma_0$, $f \in \Sigma_m$

- Wenn eine reguläre Baumgrammatik G mit $L = L(G)$ und $L(G) := \{t \mid \xi \Rightarrow_G^* t\}$ existiert, dann heißt L eine *reguläre Baumsprache*.
- Die Menge aller regulären Baumsprachen sei

$$\mathcal{R} := \{L \mid \exists \text{ reguläre Baumgrammatik } G : L(G) = L\}.$$

- Reguläre Baumgrammatik $G = (\Sigma, N, \xi, P)$
  - Startsymbol $\xi \in N$
  - Signatur $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \{0,..,l\}}$ mit Σ_i endlich, für alle i
  - Produktionen P von der Form

$$\eta \ \Rightarrow_G \ \ a \mid f(\nu_1, .., \nu_m) \mid \mu$$

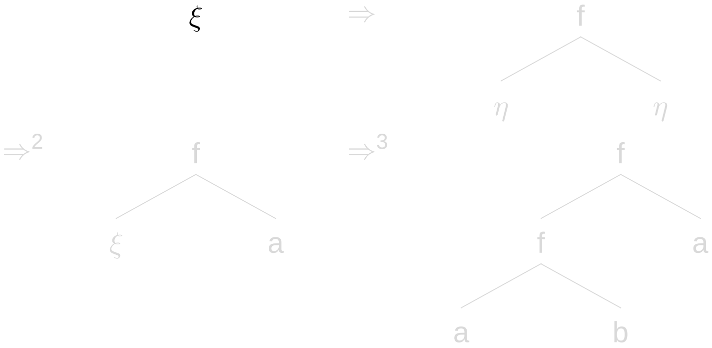
  mit $\eta, \mu, \nu_1, .., \nu_m \in N$, $a \in \Sigma_0$, $f \in \Sigma_m$
- Wenn eine reguläre Baumgrammatik G mit $L = L(G)$ und $L(G) := \{t \mid \xi \Rightarrow_G^* t\}$ existiert, dann heißt L eine *reguläre Baumsprache*.
- Die Menge aller regulären Baumsprachen sei

$$\mathcal{R} := \{L \mid \exists \text{ reguläre Baumgrammatik } G : L(G) = L\}.$$

- Beispiel einer Grammatik B mit Startsymbol ξ

$$
\begin{aligned}
\xi &::= f(\eta, \eta) \\
\eta &::= a \mid b \mid \xi
\end{aligned}
$$

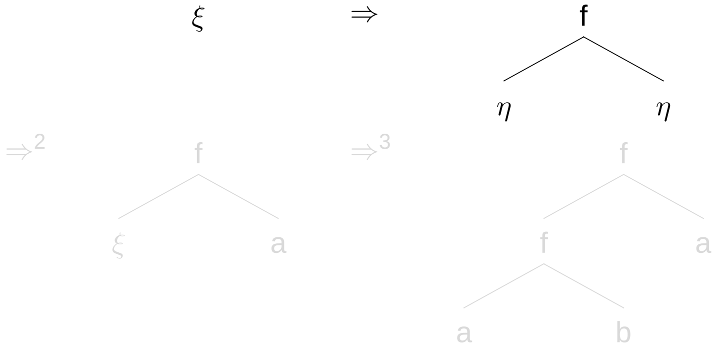
- Eine Beispielableitung



- Beispiel einer Grammatik B mit Startsymbol ξ

$$
\begin{aligned}
\xi &::= f(\eta, \eta) \\
\eta &::= a \mid b \mid \xi
\end{aligned}
$$

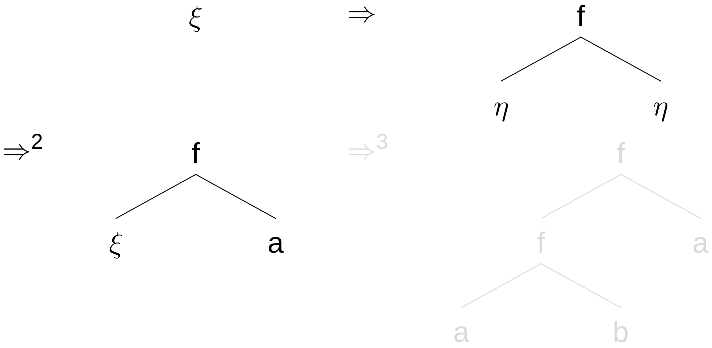
- Eine Beispielableitung



- Beispiel einer Grammatik B mit Startsymbol ξ

$$
\begin{aligned}
\xi &::= f(\eta, \eta) \\
\eta &::= a \mid b \mid \xi
\end{aligned}
$$

- Eine Beispielableitung

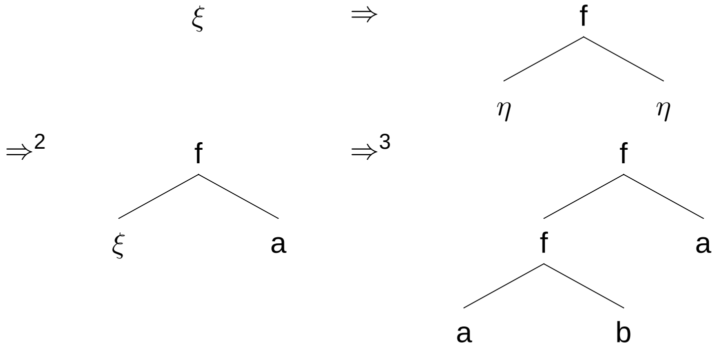


Reguläre Baumgrammatiken
Beispiel

- Beispiel einer Grammatik B mit Startsymbol ξ

$$\begin{aligned} \xi &::= f(\eta, \eta) \\ \eta &::= a \mid b \mid \xi \end{aligned}$$

- Eine Beispielableitung



- Endlicher Baumautomat $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$
  - Signatur $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \{0,..,l\}}$, Σ_i endlich, für alle i
  - Endliche Zustandsmenge Z mit Endzuständen F, $F \subseteq Z$
  - Basisinterpretation $\mathcal{B} : \Sigma_0 \to Z$ und $\mathcal{B} : \Sigma_i \to (Z^i \to Z)$
- Eine Baumalgebra $\mathcal{T}_\Sigma$ bezüglich einer Signatur $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \{0,..,l\}}$ ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &\subseteq \mathcal{T}_\Sigma \\ f(t_1, .., t_m) &\in \mathcal{T}_\Sigma, \text{ für } f \in \Sigma_m \text{ und } t_i \in \mathcal{T}_\Sigma \end{aligned}$$

- Interpretation $\mathcal{I} : \mathcal{T}_\Sigma \to Z$ ist induktiv definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(a) &:= \mathcal{B}(a), \text{ für } a \in \Sigma_0 \\ \mathcal{I}(f(t_1, .., t_m)) &:= (\mathcal{B}(f))(\mathcal{I}(t_1), .., \mathcal{I}(t_m)), \text{ für } f(t_1, .., t_m) \in \mathcal{T}_\Sigma \end{aligned}$$

- Endlicher Baumautomat $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$
  - Signatur $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \{0,..,l\}}$, Σ_i endlich, für alle i
  - Endliche Zustandsmenge Z mit Endzuständen F, $F \subseteq Z$
  - Basisinterpretation $\mathcal{B} : \Sigma_0 \to Z$ und $\mathcal{B} : \Sigma_i \to (Z^i \to Z)$
- Eine Baumalgebra $\mathcal{T}_\Sigma$ bezüglich einer Signatur $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \{0,..,l\}}$ ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &\subseteq \mathcal{T}_\Sigma \\ f(t_1, .., t_m) &\in \mathcal{T}_\Sigma, \text{ für } f \in \Sigma_m \text{ und } t_i \in \mathcal{T}_\Sigma \end{aligned}$$

- Interpretation $\mathcal{I} : \mathcal{T}_\Sigma \to Z$ ist induktiv definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(a) &:= \mathcal{B}(a), \text{ für } a \in \Sigma_0 \\ \mathcal{I}(f(t_1, .., t_m)) &:= (\mathcal{B}(f))(\mathcal{I}(t_1), .., \mathcal{I}(t_m)), \text{ für } f(t_1, .., t_m) \in \mathcal{T}_\Sigma \end{aligned}$$

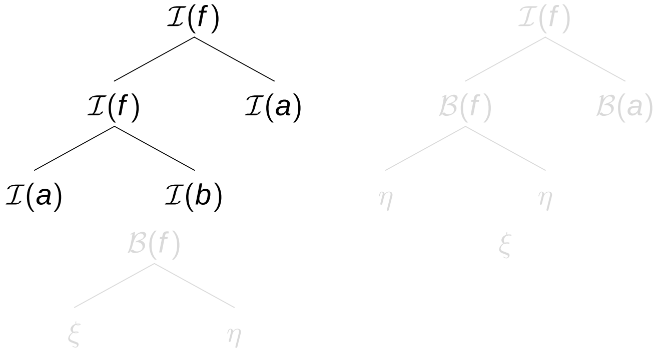
- Ein EBA $\mathcal{E}$ akzeptiert eine Sprache L, wenn

$$L = A(\mathcal{E}) := \{x \in \mathcal{T}_\Sigma \mid \mathcal{I}(x) \in F\}.$$

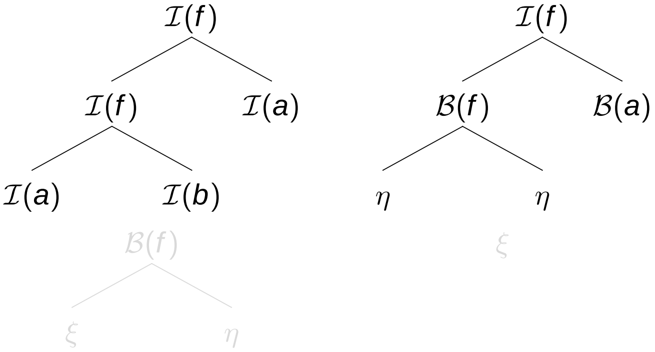
- Die Menge aller Sprachen, die durch endliche Automaten akzeptiert werden, sei

$$\mathcal{A} := \{L \mid \exists \text{ endlicher Baumautomat } \mathcal{E} : A(\mathcal{E}) = L\}.$$

- Betrachten wir den EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\widetilde{\Sigma}, \{\xi, \eta\}, \{\xi\}, \widetilde{\mathcal{B}})$, mit $\widetilde{\Sigma}_0 := \{a, b\}, \widetilde{\Sigma}_2 := \{f\}$, $\widetilde{\mathcal{B}}(a) := \widetilde{\mathcal{B}}(b) := \eta, \widetilde{\mathcal{B}}(f(t_1, t_2)) := \xi$
- *Beispiel:* Eine (Bottom-Up) Worterkennung durch den EBA $\widetilde{\mathcal{E}}$



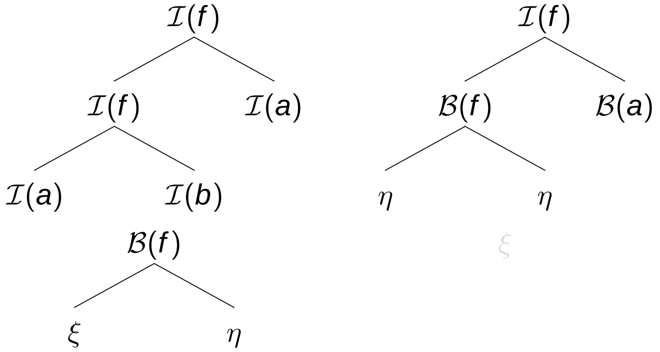
- Betrachten wir den EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\widetilde{\Sigma}, \{\xi, \eta\}, \{\xi\}, \widetilde{\mathcal{B}})$, mit $\widetilde{\Sigma}_0 := \{a, b\}, \widetilde{\Sigma}_2 := \{f\}$, $\widetilde{\mathcal{B}}(a) := \widetilde{\mathcal{B}}(b) := \eta, \widetilde{\mathcal{B}}(f(t_1, t_2)) := \xi$
- *Beispiel:* Eine (Bottom-Up) Worterkennung durch den EBA $\widetilde{\mathcal{E}}$



Endliche Baumautomaten

Beispiel einer Worterkennung eines Endlichen Automaten

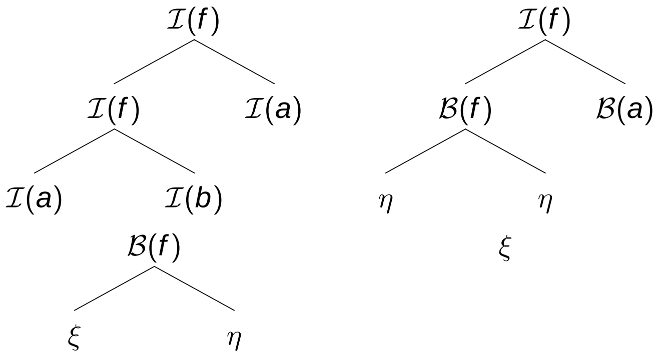
- Betrachten wir den EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\widetilde{\Sigma}, \{\xi, \eta\}, \{\xi\}, \widetilde{\mathcal{B}})$, mit $\widetilde{\Sigma}_0 := \{a, b\}, \widetilde{\Sigma}_2 := \{f\}$, $\widetilde{\mathcal{B}}(a) := \widetilde{\mathcal{B}}(b) := \eta, \widetilde{\mathcal{B}}(f(t_1, t_2)) := \xi$
- *Beispiel:* Eine (Bottom-Up) Worterkennung durch den EBA $\widetilde{\mathcal{E}}$



Endliche Baumautomaten

Beispiel einer Worterkennung eines Endlichen Automaten

- Betrachten wir den EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\widetilde{\Sigma}, \{\xi, \eta\}, \{\xi\}, \widetilde{\mathcal{B}})$, mit $\widetilde{\Sigma}_0 := \{a, b\}, \widetilde{\Sigma}_2 := \{f\}$, $\widetilde{\mathcal{B}}(a) := \widetilde{\mathcal{B}}(b) := \eta, \widetilde{\mathcal{B}}(f(t_1, t_2)) := \xi$
- *Beispiel:* Eine (Bottom-Up) Worterkennung durch den EBA $\widetilde{\mathcal{E}}$



- *Satz I:* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$
- *Lemma I.1:* Zu jeder regulären Baumgrammatik G gibt es einen endlichen Baumautomaten $\mathcal{E}$
  - *Beweisskizze:* Gegeben eine Baumgrammatik $G = (\Sigma, N, \nu_0, P)$. Konstruiere einen EBA $\mathcal{E} := (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$ mit
    - $Z = \mathfrak{P}(N)$, $F = \{G \in Z \mid \nu_0 \in G\}$
    - $\mathcal{B}(a) := \{\nu_i \mid (\nu_i \Rightarrow c) \in P\}$, für $a \in \Sigma_0$ und
    - $\mathcal{B}(f)(\mu_1, .., \mu_m) := \{\nu_i \mid (\nu_i \Rightarrow f(\mu_1, .., \mu_m)) \in P\}$, für $f \in \Sigma_m$
- *Lemma I.2:* Zu jedem endlichen Baumautomaten $\mathcal{E}$ gibt es eine reguläre Baumgrammatik G
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$. Konstruiere eine Baumgrammatik $G = (\Sigma, Z, \nu_0, P)$ mit $P = \{\nu_0 \Rightarrow \mu \mid \mu \in F\} \cup \{\nu \Rightarrow c \mid \nu \in Z, \mathcal{B}(c) = \nu, c \in \Sigma_0\} \cup \{\nu \Rightarrow f(\mu_1, .., \mu_m) \mid \nu, \mu_i \in Z, f \in \Sigma_m, \mathcal{B}(f)(\mu_1, .., \mu_m) = \nu\}$

- *Satz I:* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$
- *Lemma I.1:* Zu jeder regulären Baumgrammatik G gibt es einen endlichen Baumautomaten $\mathcal{E}$
  - *Beweisskizze:* Gegeben eine Baumgrammatik $G = (\Sigma, N, \nu_0, P)$. Konstruiere einen EBA $\mathcal{E} := (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$ mit
    - $Z = \mathfrak{P}(N)$, $F = \{G \in Z \mid \nu_0 \in G\}$
    - $\mathcal{B}(a) := \{\nu_i \mid (\nu_i \Rightarrow c) \in P\}$, für $a \in \Sigma_0$ und
    - $\mathcal{B}(f)(\mu_1, .., \mu_m) := \{\nu_i \mid (\nu_i \Rightarrow f(\mu_1, .., \mu_m)) \in P\}$, für $f \in \Sigma_m$
- *Lemma I.2:* Zu jedem endlichen Baumautomaten $\mathcal{E}$ gibt es eine reguläre Baumgrammatik G
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$. Konstruiere eine Baumgrammatik $G = (\Sigma, Z, \nu_0, P)$ mit $P = \{\nu_0 \Rightarrow \mu \mid \mu \in F\} \cup \{\nu \Rightarrow c \mid \nu \in Z, \mathcal{B}(c) = \nu, c \in \Sigma_0\} \cup \{\nu \Rightarrow f(\mu_1, .., \mu_m) \mid \nu, \mu_i \in Z, f \in \Sigma_m, \mathcal{B}(f)(\mu_1, .., \mu_m) = \nu\}$

- *Lemma II.1:* Ist $L \in \mathcal{R}$ mit $L = \mathcal{A}(\mathcal{E})$, so folgt $(\mathcal{T}_\Sigma \setminus L) \in \mathcal{R}$.
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$. Konstruiere einen EBA $\mathcal{E}' = (\Sigma, Z, (Z \setminus F), \mathcal{B})$.
- *Lemma II.2:* Sind $L, L' \in \mathcal{R}$, so folgt $(L \cap L') \in \mathcal{R}$.
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = L$ und ein EBA $\mathcal{E}' = (\Sigma', Z', F', \mathcal{B}')$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{E}') = L'$. Konstruiere eine EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\Sigma \cap \Sigma', Z \times Z', F \times F', \widetilde{\mathcal{B}})$ mit
    - $\widetilde{\mathcal{B}}(a) = (\mathcal{B}(a), \mathcal{B}'(a))$, für $a \in \Sigma_0 \cap \Sigma'_0$
    - $\widetilde{\mathcal{B}}(f)((\nu_1, \mu_1), .., (\nu_m, \mu_m)) = (\mathcal{B}(f)(\nu_1, .., \nu_m), \mathcal{B}'(f)(\mu_1, .., \mu_m))$, für $f \in \Sigma_m \cap \Sigma'_m$, $\nu_j \in Z$ und $\mu_j \in Z'$.
- *Korollar II.3:* Sind $L, L' \in \mathcal{R}$, so folgt $(L \cup L') \in \mathcal{R}$.
- *Lemma II.4:* Hat $L \in \mathcal{R}$ ein Alphabet $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, so ist auch die i-te Projektion $pr_i(L) \in \mathcal{R}$ $(i \in \{1, 2\})$.

- *Lemma II.1:* Ist $L \in \mathcal{R}$ mit $L = \mathcal{A}(\mathcal{E})$, so folgt $(\mathcal{T}_\Sigma \setminus L) \in \mathcal{R}$.
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$. Konstruiere einen EBA $\mathcal{E}' = (\Sigma, Z, (Z \setminus F), \mathcal{B})$.
- *Lemma II.2:* Sind $L, L' \in \mathcal{R}$, so folgt $(L \cap L') \in \mathcal{R}$.
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = L$ und ein EBA $\mathcal{E}' = (\Sigma', Z', F', \mathcal{B}')$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{E}') = L'$. Konstruiere eine EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\Sigma \cap \Sigma', Z \times Z', F \times F', \widetilde{\mathcal{B}})$ mit
    - $\widetilde{\mathcal{B}}(a) = (\mathcal{B}(a), \mathcal{B}'(a))$, für $a \in \Sigma_0 \cap \Sigma_0'$
    - $\widetilde{\mathcal{B}}(f)((\nu_1, \mu_1), .., (\nu_m, \mu_m)) = (\mathcal{B}(f)(\nu_1, .., \nu_m), \mathcal{B}'(f)(\mu_1, .., \mu_m))$, für $f \in \Sigma_m \cap \Sigma_m'$, $\nu_j \in Z$ und $\mu_j \in Z'$.
- *Korollar II.3:* Sind $L, L' \in \mathcal{R}$, so folgt $(L \cup L') \in \mathcal{R}$.
- *Lemma II.4:* Hat $L \in \mathcal{R}$ ein Alphabet $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, so ist auch die i-te Projektion $pr_i(L) \in \mathcal{R}$ $(i \in \{1, 2\})$.

- *Lemma II.1:* Ist $L \in \mathcal{R}$ mit $L = \mathcal{A}(\mathcal{E})$, so folgt $(\mathcal{T}_\Sigma \setminus L) \in \mathcal{R}$.
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$. Konstruiere einen EBA $\mathcal{E}' = (\Sigma, Z, (Z \setminus F), \mathcal{B})$.
- *Lemma II.2:* Sind $L, L' \in \mathcal{R}$, so folgt $(L \cap L') \in \mathcal{R}$.
  - *Beweisskizze:* Gegeben ein EBA $\mathcal{E} = (\Sigma, Z, F, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = L$ und ein EBA $\mathcal{E}' = (\Sigma', Z', F', \mathcal{B}')$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{E}') = L'$. Konstruiere eine EBA $\widetilde{\mathcal{E}} := (\Sigma \cap \Sigma', Z \times Z', F \times F', \widetilde{\mathcal{B}})$ mit
    - $\widetilde{\mathcal{B}}(a) = (\mathcal{B}(a), \mathcal{B}'(a))$, für $a \in \Sigma_0 \cap \Sigma'_0$
    - $\widetilde{\mathcal{B}}(f)((\nu_1, \mu_1), .., (\nu_m, \mu_m)) = (\mathcal{B}(f)(\nu_1, .., \nu_m), \mathcal{B}'(f)(\mu_1, .., \mu_m))$, für $f \in \Sigma_m \cap \Sigma'_m$, $\nu_j \in Z$ und $\mu_j \in Z'$.
- *Korollar II.3:* Sind $L, L' \in \mathcal{R}$, so folgt $(L \cup L') \in \mathcal{R}$.
- *Lemma II.4:* Hat $L \in \mathcal{R}$ ein Alphabet $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, so ist auch die i-te Projektion $pr_i(L) \in \mathcal{R}$ ($i \in \{1, 2\}$).

- Charakterisierung von Bäumen über die Eigenschaften seiner Knoten: Monadische Logik zweiter Ordnung (MSO).
- *MSO Formel F:*
  $F := X(x) \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \implies F \mid \neg F \mid (F)$
  $\mid \exists x.F(x) \mid \exists X.F(X) \mid \forall x.F(x) \mid \forall X.F(X)$
  $\mid x \sigma_m y \mid x < y \mid x = y \mid X = Y \mid L_f(x)$,
  wobei $x, y : K$, $X, Y : K \to B$ und $f \in \Sigma$.
- *Beispiel:* N-äre Baume

$$
\begin{aligned}
St_n(x) &:= (\exists_1 y.x \sigma_n y) \wedge (\forall_1 z.\neg(x \sigma_{n+1} z)) \\
Bl(x) &:= \neg(\exists_1 y.x < y) \\
BSt_n(X) &:= \forall_1 x.x \in X \implies (St_n(x) \vee Bl(x))
\end{aligned}
$$

Monadische Logik zweiter Ordnung

Semantik - Baumstrukturen in $\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}$

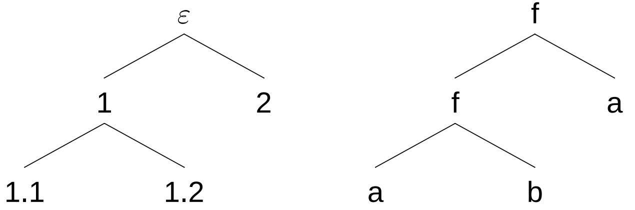
- Interpretation in einem konkreten Modell: Baumstrukturen $B = (\mathcal{L}, D)$ in $\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}$ ($0 \notin \mathbb{N}$) mit $D \subset \mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}$, sodass gilt
  D ist Präfixabgeschlossen, d.h. aus $u.w = v \in D$ folgt $u \in D$
  und ist $u.j \in D$ und $i \leq j$, dann ist auch $u.i \in D$
- $\mathfrak{I}(\sigma_n(x, y)) :\Leftrightarrow y = x.n$
  $\mathfrak{I}(L_f(x)) :\Leftrightarrow x \mathcal{L} f$ ($f \in \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i$)
- *Beispiel:*

$D := \{\varepsilon, 1, 2, 1.1, 1.2\}$,
$(\varepsilon, f), (1, f), (2, a), (1.1, a), (1.2, b) \in \mathcal{L}$

Monadische Logik zweiter Ordnung

Semantik - Baumstrukturen in $\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}$

- Interpretation in einem konkreten Modell: Baumstrukturen $B = (\mathcal{L}, D)$ in $\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}$ ($0 \notin \mathbb{N}$) mit $D \subset \mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}$, sodass gilt
  D ist Präfixabgeschlossen, d.h. aus $u.w = v \in D$ folgt $u \in D$
  und ist $u.j \in D$ und $i \leq j$, dann ist auch $u.i \in D$
- $\mathfrak{I}(\sigma_n(x, y)) :\Leftrightarrow y = x.n$
  $\mathfrak{I}(L_f(x)) :\Leftrightarrow x\mathcal{L}f$ ($f \in \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i$)
- *Beispiel:*



$D := \{\varepsilon, 1, 2, 1.1, 1.2\}$,
$(\varepsilon, f), (1, f), (2, a), (1.1, a), (1.2, b) \in \mathcal{L}$

- Lemma II.5: Zu jeder regulären Baumgrammatik gibt es eine MSO Formel.
- *Beispiel:* Betrachten wir die Baumgrammatik G mit Startsymbol ξ

$$\begin{aligned} \xi &::= f(\eta, \eta) \\ \eta &::= a \mid b \mid \xi \end{aligned}$$

- Die Entsprechende MSO-Formel lautet:

$$\begin{aligned} \phi &:= \exists \xi . \exists \eta . (\exists x . \widetilde{\xi}(x) \wedge Wu(x)) \wedge \\ &\quad (\forall y . \xi(y) \leftrightarrow \widetilde{\xi}(y) \wedge \eta(y) \leftrightarrow \widetilde{\eta}(y)) \\ \widetilde{\xi}(x) &:= L_f(x) \wedge (\exists y . x \sigma_1 y \wedge \eta(y)) \wedge (\exists z . x \sigma_2 z \wedge \eta(z)) \\ \widetilde{\eta}(x) &:= L_a(x) \vee L_b(x) \vee \xi(x) \end{aligned}$$

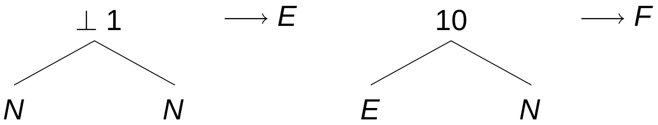
- Lemma II.5: Zu jeder regulären Baumgrammatik gibt es eine MSO Formel.
- *Beispiel:* Betrachten wir die Baumgrammatik G mit Startsymbol ξ

$$
\begin{aligned}
\xi &::= f(\eta, \eta) \\
\eta &::= a \mid b \mid \xi
\end{aligned}
$$

- Die Entsprechende MSO-Formel lautet:

$$
\begin{aligned}
\phi &:= \exists \xi . \exists \eta . (\exists x . \widetilde{\xi}(x) \wedge Wu(x)) \wedge \\
&\quad (\forall y . \xi(y) \leftrightarrow \widetilde{\xi}(y) \wedge \eta(y) \leftrightarrow \widetilde{\eta}(y)) \\
\widetilde{\xi}(x) &:= L_f(x) \wedge (\exists y . x \sigma_1 y \wedge \eta(y)) \wedge (\exists z . x \sigma_2 z \wedge \eta(z)) \\
\widetilde{\eta}(x) &:= L_a(x) \vee L_b(x) \vee \xi(x)
\end{aligned}
$$

- Wir beschränken uns auf die Logik $WS2K$ mit zwei Nachfolgerrelationen σ_1, σ_2.
- *Beispiel:* Betrachten wir die MSO-Formel $\phi(x, y) := x\sigma_1 y$.
  Es sei $\Sigma_0 := \perp\perp$ und $\Sigma_2 := \{\perp, 0, 1\}^2 \setminus \{\perp\perp\}$.
  Wir konstruieren den EBA $\mathcal{E} := (\Sigma, Z, \{\mathrm{F}\}, \mathcal{B})$ mit
  $Z := \{N, E, T, F\}$ und $\mathcal{B}$:
  $\mathcal{B}(\perp\perp) = N$, $\mathcal{B}(11)(\_, \_) = T$, $\mathcal{B}(1 \perp)(\_,) = T$



$\mathcal{B}(\perp 1)(N, N) = E$ $\qquad$ $\mathcal{B}(10)(E, N) = F$

- *Lemma II.6:* Zu jeder MSO Formel gibt es einen endlichen Baumautomaten.
  - *Beweisskizze:* σ_n, siehe oben, andere Basisfälle ähnlich. Induktionsschritt: $\wedge, \vee, \neg, \implies$ folgen direkt aus Lemma II.1 bis II.3. Existenzquantor als Projektion, nach Lemma II.4.
- *Korollar II.7:* MSO ist endscheidbar.

- Büchi hat 1960 die Äquivalenz zwischen MSO definierbaren Sprachen mit einer Nachfolgerrelation σ_1 ($WS1S$) und regulären Sprachen gezeigt.
- Ein String $s = a_1..a_n$ lässt sich algebraisch schreiben als, $a_n(a_{n-1}(..(a_1(\varepsilon))..))$ mit $\Sigma_0 = \{\varepsilon\}$ und $a_1, .., a_n \in \Sigma_1$.

Zusammenfassung

- Drei verschiedene Charakterisierungen von regulären Baumsprachen
- Äquivalenz der Charakterisierungen
- Abschlusseigenschaften von regulären Baumsprachen

- B. Khoussainov, and A. Nerode.
  Automata Theory and its Applications.
  Progress in Computer Science and Applied Logic, 21.Auflage, 2001.
- H.. Comon, M. Dauchet, and R. Gilleron et al.
  Tree Automata Techniques and Applications.
  Version from 2005, to appear.
- F. Gécseg, M. Steinby
  Tree Languages.
  In G. Rozenberg, A. Salomaa, editors, *Handbook of Formal Languages Vol. 3*, pages 1-68. Springer Verlag, 1997.