Fachrichtung 6.2 — Informatik
Universität des Saarlandes
Tutorenteam der Vorlesung Programmierung 1

Programmierung 1 (Wintersemester 2012/13)

Erklärung 2

(Korrektheitssatz vs. Induktion)

Hinweis: Dieses Blatt enthält eine zusätzliche Erklärung erstellt von den Tutoren. Für die Richtigkeit besteht daher keine Gewähr.

Die Erklärung sowie ihr Thema sind weder für die Klausur relevant noch irrelevant. ***Die ursprüngliche Erklärung stammt aus dem Wintersemester 11/12***

Auf den ersten Blick sehen Korrektheitssatz und Induktion zunächst recht ähnlich aus. Wer sich beide näher ansieht, findet aber zahlreiche Unterschiede.
Als Erstes rufen wir uns beide einzeln in Erinnerung:

1 Korrektheitssatz:

Wir betrachten ein Beispiel: Sei $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ eine Funktion mit

$f(x) = \{\ x\ ,\ \ falls\ x < 2$
$x - 1,\ \ sonst$

Außerdem haben wir folgende Prozedur gegeben:

$g : \{0, 2, 3\} \rightarrow 0, 1, 2, 3$
$g\ 0 = 0$
$g\ 2 = 1$
$g\ 3 = g\ 2\ +\ 1$

Nun wollen wir mithilfe des Korrektheitssatzes beweisen, dass g f berechnet. Bekanntermaßen besteht der Korrektheitssatz aus zwei Bedingungen:

Eine Prozedur p berechnet eine Funktion f, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Dom f $\subseteq$ Dom g

(b) f erfüllt die definierenden Gleichungen von p für alle $x \in$ Dom f

In diesem Beispiel tritt in jeder Bedingung ein Problem auf, das wir näher betrachten müssen:

- Die Prozedur hat einen anderen Definitionsbereich als die Funktion, nämlich $\{0, 2, 3\}$ im Gegensatz zu $\{0, 1, 2, 3\}$. Also gilt: $Dom\ g \neg\subset\ Dom\ f$.
  Laut Korrektheitssatz soll aber folgende Beziehung gelten: $Dom\ f\ \subseteq\ Dom\ g$. Dadurch kann man den Korrektheitssatz nicht anwenden und somit berechnet g nicht f.
  Wir wollen im Folgenden das Beispiel so anpassen, dass man den Korrektheitssatz anwenden kann.

Im Folgenden gilt also:
$g : \{0, 1, 2, 3\} \to 0, 1, 2, 3$
$g\ 0 = 0$
$g\ 1 = 1$
$g\ 2 = 1$
$g\ 3 = g\ 2\ +\ 1$
Damit ist der erste Teil des Korrektheitssatzes efüllt: $Dom\ f\ \subseteq\ Dom\ g$.

- Widmen wir uns also dem zweiten Teil des Korrektheitssatzes:
  Wir wollen zeigen, dass f die defininierenden Gleichungen von g erfüllt. Dazu zeigen wir, dass die definierenden Gleichungen von g auch dann gelten, wenn wir alle Auftreten von g durch f ersetzen.
  Zu zeigen ist also Folgendes:
  $f\ 0 = 0$
  $f\ 1 = 1$
  $f\ 2 = 1$
  $f\ 3 = f\ 2 + 1$

  Dazu gehen wir die zu zeigenden Gleichungen von oben nach unten durch:

$$
\begin{aligned}
f\ 0 &= 0 && 0 < 2 \text{ (Definition f)} \\[1em]
f\ 1 &= 1 && 1 < 2 \text{ (Definition f)} \\[1em]
f\ 2 &= 2 - 1 && 2 \geq 2 \text{ (Definition f)} \\
&= 1 \\[1em]
f\ 3 &= 3 - 1 && 3 \geq 2 \text{ (Definition f)} \\
&= 2 \\
&= 2 - 1 + 1 \\
&= f\ 2 + 1 && 2 \geq 2 \text{ (Definition f)}
\end{aligned}
$$

Damit haben wir gezeigt, dass f alle definierenden Gleichungen von g erfüllt.

Beide Punkte zusammen zeigen, dass alle Bedingungen des Korrektheitssatzes erfüllt sind.

2 Induktion

Eine weitere Alternative, eine solche Aussage zu beweisen, ist die Induktion. Hierbei ist die Idee folgende: Man zeigt eine Aussage für das kleinste Argument und anschließend für alle anderen Argumente durch folgenden Trick: Man zeigt nicht die Aussage selbst, sondern, dass die Aussage für ein größeres Argument gilt, wenn es für ein kleineres gilt. Aus diesen beiden Teilen ergibt sich, dass die Aussage für alle Argumente gilt. Das kann man sich so ähnlich vorstellen wie Domino Day: Wird das erste Argument „angschubst“, so fallen reihenweise alle anderen um. Dabei fällt jeder Stein (=Argument) um, wenn der Stein vor ihm (=das kleinere Argument) schon umgefallen ist.

3 Fazit

Da der Korrektheitssatz nie die Überlegung verwendet, dass die Richtigkeit für ein Argument deshalb gilt, weil es für ein kleineres auch gilt, ist der Korrektheitssatz keine Form der Induktion.